INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
GEORG AUGUST UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

# Ladungssektoren positiver Energie im Hochenergielimes des Schwingermodells

**Diplomarbeit**

**(leicht überarbeitet)**

vorgelegt von

André Grüning
aus Hameln

3. Januar 2000

e-mail: `gruening@theorie.physik.uni-goettingen.de`

Bunsenstraße 9
D-37073 Göttingen, Germany

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

*„Für jedes Problem gibt es eine Lösung, die einfach, klar und falsch ist.“*
HENRY LOUIS MENCKEN, 1880-1956, AMERIKANISCHER SCHRIFTSTELLER

## 1.1 Motivation und Einordnung

Streuexperimente der Hochenergiephysik zeigen, daß Hadronen Unterstrukturen besitzen, die umso mehr Teilchencharakter zeigen, je höher der Impulsübertrag zwischen den Stoßpartnern ist. Diese Unterstrukturen sind die *Quarks*. Sie besitzen eine *Farbladung*, ihre Wechselwirkungen werden durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben.

Es gibt jedoch keine *physikalischen* Zustände, die eine Farbladung tragen: Quarks tauchen nicht als ein- oder auslaufende Streuzustände auf. Man spricht von *Quarkeinschluß (Confinement)*. Die Quarks passen nicht in das herkömmliche Bild eines Teilchens, das einen Detektor triggern kann, etwa so, wie ein Elektron in einem Geiger-Müller-Zählrohr „klick“ macht.

Bei kleinen Skalen, d.h. hoher Energie, aber verhalten sich Quarks fast wie freie Teilchen. So lassen sich die bei Hochenergiestreuexperimenten auftretenden *„jets“* als Manifestationen von bei Skalen $< 10^{-15}$cm nahezu wechselwirkungsfreien Teilchen mit einer Farbladung deuten.

Im Rahmen der Algebraischen Quantenfeldtheorie (AQFT) [17], deren Methoden wir dieser Arbeit zugrunde legen, sind die Quarks Beispiele sog. *Ultrateilchen* [10, 11]. Diese Begriffsbildung beruht auf Methoden der Renormierungsgruppentheorie, die zur Analyse des Kurzabstandsverhaltens in den Rahmen der AQFT übertragen worden sind: den sogenannten *Skalenalgebren* [12, 13].

Da wir bis dato (3. Januar 2000) noch keine geschlossene nicht-perturbative Formulierung der QCD haben, üben wir uns in Anwendung dieser Methoden an „Spielzeugmodellen“. Ein einfaches mathematisch geschlossen lösbares Modell, das im Hinblick auf Quarkeinschluß und Ultrateilcheninterpretation Parallelen zur QCD aufweist, ist das *Schwingermodell* [25, 26]. Ursprünglich im Lagrangeformalismus zur Beschreibung der elektrischen Wechselwirkung eines Elektrons der Ladung $e$ mit einem Strahlungsfeld in 1+1 Dimension formuliert, zeigt sich [18], daß seine Observablenalgebra (das sind die primären Objekte der AQFT) äquivalent[i] ist zu der eines *freien* Bosons in 1+1 Dimensionen mit Masse $m = \frac{e}{\sqrt{\pi}}$. Aus Sicht der AQFT sind die beiden Modelle identisch: Die möglichen Messungen und deren Relationen untereinander sind gleich.

Die heuristische Interpretation dieses Sachverhaltes ist, daß in 1+1 Dimensionen die elektrische Wechselwirkung bei großen Abständen so stark ist, daß Elektronen

[i] bis auf einen irrelevanten klassischen Freiheitsgrad

und Positronen nur bindende Zustände eingehen, die Masse aus den ausgetauschten Feldquanten gewinnen (ähnlich wie massive Hadronen aus idealisierten masselosen Stromquarks entstehen). Es stellt sich die Frage, ob man in einem geeigneten Hochenergielimes elektrisch geladene Zustände wiederentdecken kann und ob diese Teilcheneigenschaften besitzen.

Da für uns die Observablenalgebren die primären Objekte sind, wollen wir diese heuristische Motivation und Interpretation in den Hintergrund treten lassen: Nur ausgehend von der Observablenalgebra des massiven Bosons, die wir uns als Weyl-Algebra [6] mit Hilfe der Klein-Gordon-Gleichung konstruieren können, wollen wir eine intrinsische Interpretation des Hochenergieverhaltens erhalten. Der Hochenergielimes eines massiven Bosons in 1+1 Dimensionen wurde schon in [11] durchgeführt. Darauf bauen wir auf.

Eine große Hilfe bei der Anfertigung dieser Arbeit war [4].

## 1.2 Aufbau und Ergebnisse

Den Rest dieses Kapitels verwenden wir auf eine heuristische Hinführung auf die spezifischen Probleme unseres Modells. In Kapitel 2 beginnen wir dann mit der mathematisch rigorosen Formulierung unseres Modells als Weyl-Algebra über dem symplektischen Raum der Lösungen der masselosen Klein-Gordon-Gleichung in 1+1 Dimensionen, den Wellenfunktionen. Der (nicht-reguläre) Vakuumzustand und dazu kohärente Zustände werden erklärt. Einige Eigenschaften dieses Raumes und seiner Funktionale werden dargelegt. Wir stoßen dabei auf eine ungewöhnliche Topologie auf den Wellenfunktionen, die sich in Kapitel 4 als nützlich erweisen wird.

Kapitel 3 befaßt sich mit dem Abschluß der Vakuumdarstellung. Dabei tauchen erstaunlicherweise nicht-konstruktiv lösbare Fragestellungen auf, bei denen wir Tychonoffs[ii] Theorem bemühen müssen.

Kapitel 4 enthält schließlich einen allgemeinen Satz, der diejenigen kohärenten Zustände charakterisiert, die unitär in der Vakuumdarstellung implementiert werden können. Dabei spielt die erwähnte Topologie eine Rolle.

Diese ersten recht technischen Kapitel sind geprägt von dem Bemühen, die durch die Nicht-Regularität des Vakuumzustandes auftretenden Probleme zu lösen. Es zeigt sich, daß unser symplektischer Raum kein Prähilbertraum bzgl. des den Vakuumzustand charakterisierenden Skalarproduktes ist.

Kapitel 5 zeigt uns, daß es Automorphismen gibt, die tatsächlich auf elektrisch geladene Sektoren führen.

In Kapitel 6 wird bewiesen, daß sich die Translationen in den geladenen Sektoren implementieren lassen und der Spektrumsbedingung genügen. Wesentliches Ingrediens ist ein Satz, der Trägereigenschaften einer Distribution mit den Analytizitätseigenschaften ihrer Fouriertransformierten verknüpft.

Die im massiven Fall eingeschlossenen Ladungen tauchen tatsächlich im Hochenergielimes als Zustände in physikalischen Sektoren auf.

Kapitel 7 behandelt – sicher nicht abschließend – die Teilcheninterpretation gewisser Zustände in den geladenen Sektoren. Zwar haben wir Zustände mit scharfer Masse, aber sie können nicht als geladene Ein-Teilchen-Zustände gedeutet werden. Denn mit einem kleinen (zitierten) Satz zeigen wir, daß diese Zustände neben den geladenen (Infra-)Teilchen noch „Photonen“ enthalten müssen. Wir nennen sie *Pseudoteilchen.*

Unbekannte Notationen schlage man im Anhang nach.

Unser Modell zeigt das Auftreten von Ladungssektoren im Hochenergielimes einer Theorie, die bei endlichen Skalen keine geladenen Zustände enthalten kann.

[ii] Der Autor glaubt, daß dieser Herr sich Тихонов schreibt, was als „Tichonow“ umgeschrieben werden sollte.

Aufgrund der erwähnten Besonderheiten in 1+1 Dimensionen ist es jedoch nicht ohne weiteres möglich, die Ultrateilchensituation mit der der QCD zu vergleichen. (Dort erwartet man im Hochenergielimes die Quarks als freie Wigner-Teilchen.)

## 1.3 Das freie reelle Skalarfeld mit Masse $m > 0$ in 1+1 Dimensionen

Betrachten wir das reelle Skalarfeld in 1+1-Dimensionen mit Masse $m > 0$. Es beschreibt ein spinloses Boson und ist gegeben durch eine operatorwertige Distribution $\Phi(x)$ über $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, die folgende Gleichungen erfüllt:

$$\begin{gathered}(\Box + m^2)\Phi(x) = 0 \quad \text{(Klein-Gordon-Gleichung)} \\ [\Phi(x), \Phi(y)] = i\Delta_m(x-y) \quad \text{(kanonische Vertauschungsrelationen)}\end{gathered}$$

mit einer distributionellen Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

$$\Delta_m(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \epsilon(p_0)\delta(p^2 - m^2)e^{-ipx}d^2p \quad \text{(Kommutatorfunktion)}$$

zu den Anfangswerten

$$\Delta_m(x)|_{x_0=0} = 0, \quad \partial_0\Delta_m(x)|_{x_0=0} = -\delta(\mathbf{x}). \tag{1.1}$$

Da $\Phi(f) = 0$ für $f = (\Box + m^2)g, g \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, führen wir auf den Testfunktionen eine Äquivalenzrelation $\sim$ ein, d.h. $f \sim g$, falls $(\Box + m^2)(f - g) = 0$. Im Impulsraum bedeutet das, daß nur die Werte von $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}$ auf der Massenschale $p^2 - m^2 = 0$ relevant sind.[iii]

Die von den Operatoren $\Phi(f), f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)/\sim$ aufgespannte Feldalgebra besitzt eine (Fock-)Vakuumdarstellung vermittelst des Vakuumzustandes $\omega_m$, der auf den Erzeugenden der Feldalgebra durch ein reelles Skalarprodukt gegeben ist und dann linear fortgesetzt wird:

$$\begin{aligned}\omega_m(\Phi(f)^*\Phi(g)) &:= (f,g) \\ (f,g) &:= 4\pi\,\mathrm{Re}\int \overline{\widetilde{f}(p)}\widetilde{g}(p)\Theta(p_0)\delta(p^2 - m^2)d^2p \\ &= 4\pi\,\mathrm{Re}\int \overline{\widetilde{f}(\omega(\mathbf{p}), \mathbf{p})}\widetilde{g}(\omega(\mathbf{p}), \mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})},\end{aligned} \tag{1.2}$$

wobei $\omega(\mathbf{p}) := \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ist. Die Fockraumdarstellung liefert uns eine Interpretation des reellen Skalarfeldes im Sinne von (Wigner-)Teilchen [27] der Masse $m$.

Einen Abstraktionsschritt weiter, gelangt man von der Feldalgebra zur Weyl-Algebra $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$, die aufgespannt wird von Elementen $W(f), f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)/\sim$ mit

$$\begin{gathered}W(0) = \mathbb{1} \\ W(f)^* = W(-f) \\ W(f)W(g) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}W(f+g) \quad \text{(exponenzierte Vertauschungsrelationen)}\end{gathered} \tag{1.3}$$

mit der symplektischen Form $\sigma(\cdot,\cdot)$, gegeben durch $\Delta_m$ als Integralkern:

$$\begin{aligned}\sigma(f,g) &= 4\pi\,\mathrm{Im}\int \overline{\widetilde{f}(p)}\widetilde{g}(p)\Theta(p_0)\delta(p^2 - m^2)d^2p \\ &= 4\pi\,\mathrm{Im}\int \overline{\widetilde{f}(\omega(\mathbf{p}), \mathbf{p})}\widetilde{g}(\omega(\mathbf{p}))\frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

[iii] Im folgenden wird nicht unterschieden zwischen $f$ und seiner Äquivalenzklasse $[f]$.

Der Vakuumzustand wird auf $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$ durch lineare Fortsetzung und Abschluß von

$$\omega(W(f)) = e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2} \tag{1.5}$$

gegeben, wobei $\|\cdot\|$ von dem Skalarprodukt (1.2) stammt. Mittels der GNS-Konstruktion [5] findet man eine Darstellung dieser Algebra als Unteralgebra der Algebra der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum.

Anschaulich stellt man sich unter der Weyl-Algebra die exponenzierten Feldoperatoren vor (letzte brauchen aber – wie wir später sehen werden – nicht in jedem physikalisch sinnvollen Modell zu existieren):[iv] $W(f) = e^{i\Phi(f)}$. Diese Gleichung gilt tatsächlich rigoros in jeder regulären Darstellung der Weyl-Algebra (hier, für $m > 0$, in der Vakuumdarstellung und damit kraft lokaler Normalität in jeder physikalisch interessierenden Darstellung).

## 1.4 Reinterpretation

Man gelangt wie folgt zu einer Reinterpretation des freien reellen skalaren Feldes in 1+1 Dimensionen. Dabei wollen wir diesen und den folgenden Abschnitt der Anschaulichkeit halber mithilfe der operatorwertigen Distribution $\Phi(x)$ formulieren. Die Übertragung auf Feld- und Weyl-Algebra liegt auf der Hand.

Wir wollen in 1+1 Dimensionen so etwas wie Elektrodynamik betreiben, d.h. wir benötigen einen schiefsymmetrischen Feldstärketensor. Wir stellen fest, daß ein solcher in 1+1 Dimensionen genau einen Freiheitsgrad besitzt. Diesen Tensor können wir uns aus dem Skalarfeld konstruieren, indem wir

$$F^{\mu\nu} := \epsilon^{\mu\nu}\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -\Phi \\ \Phi & 0 \end{pmatrix}$$

setzen. $\epsilon_{\mu\nu}$ ist der total antisymmetrische Tensor in $1+1$ Dimensionen. Zu dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ gehört ein Strom

$$j^\mu := \partial_\nu F^{\nu\mu} \quad \text{d.h.} \quad j^0 = \partial_1\Phi, \quad j^1 = -\partial_0\Phi \quad \text{(Gaußsches Gesetz)}, \tag{1.6}$$

der *per constructionem* erhalten ist: $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Man kann zeigen, daß jeder Zustand $\Psi$ aus einer geeigneten dichten Menge im Fockraum die Ladung Null trägt:

$$\int_{x_0=0} \langle \Psi, j_0(x_0, \mathbf{x})\Psi\rangle d\mathbf{x} = 0. \tag{1.7}$$

Wie können wir einen geladenen Sektor erreichen? Ein probates Mittel dazu sind sog. kohärente Zustände. Betrachten wir folgende Abbildung $\gamma$ der Feldalgebra auf sich selbst ($D$ ist eine reelle Funktion oder Distribution):

$$\gamma : \Phi(x) \mapsto \Phi(x) + D(x)\mathbb{1}, \quad (\Box + m^2)D(x) = 0. \tag{1.8}$$

Das ist sicherlich ein Feldalgebra-Automorphismus, denn $\gamma(\Phi)$ erfüllt wieder die Klein-Gordon-Gleichung und die Vertauschungsrelationen, weil $\gamma$ nur ein Vielfaches der Eins addiert.

[iv] In diesem Sinne kann man mit dem Weyl-Algebra-Formalismus eine größere Klasse von Modellen beschreiben als mit Feld-Algebren, abgesehen von dem technischen Vorteil, daß eine Weyl-Algebra nur beschränkte Operatoren enthält.

Sei $D$ wie folgt durch seine Anfangswerte gegeben:

$$\begin{aligned} D(0,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \partial_0 D(0,\mathbf{x}) = 0, \\ \rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), \quad \int \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} = q \neq 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Der Zustand $\omega \circ \gamma$ liegt dann sicher nicht im Vakuumsektor, denn der Erwartungswert $(\omega \circ \gamma)(\Phi(x)) = \omega(\Phi(x)) + D(x)$ für das Feld geht für $x \to \infty$ rechts raumartig nicht gegen Null, sondern gegen $q$. Man zeigt, daß dieser Zustand im Sinne des obigen Integrals (1.7) die Ladung $q$ trägt.

Wir haben also einen geladenen Zustand gefunden. Allerdings divergiert die (klassische) Energie des Feldes $D$:

$$H(D) = \int \left(\frac{1}{2}\partial_0 D(0,\mathbf{x})^2 + \frac{1}{2}\partial_1 D(0,\mathbf{x})^2 + \frac{1}{2}m^2 D(0,\mathbf{x})\right) d\mathbf{x}. \tag{1.10}$$

Die beiden ersten Terme im Integranden sind Null bzw. aus $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, der letzte allerdings wird konstant $\frac{1}{2}m^2 q$, wenn wir uns mit $\mathbf{x}$ rechts des Trägers von $\rho$ befinden. Das Integral existiert nicht. („Die Energie ist unendlich.“)

Man kann nicht erwarten, daß diese Zustände einen von unten beschränkten Energieoperator zulassen. Im Sinne der AQFT bedeutet das, daß die Translationen in diesen Zuständen unitär mit Spektrum im Vorwärtslichtkegel implementiert werden können.

Unsere heuristische Argumentation findet ihre Bestätigung in dem

**Satz 1.1 ([7, 15, 18])** *In den bzgl. $j_0$ geladenen Sektoren lassen sich die Translationen nicht mit positiver Energie unitär implementieren. Es gibt dort keinen von unten beschränkten Energieoperator.*

Fassen wir zusammen: Es gibt einen erhaltenen Strom, aber keine geladenen Sektoren bzgl. dieses Stromes, die die Spektrumsbedingung erfüllen. Anschaulicher: Wir können mit endlicher Energie keinen geladenen Zustand präparieren. Diesen Sachverhalt kann man in Analogie zum Quarkeinschluß in der QCD deuten.

Eine Chance, solche geladenen Sektoren zu finden, hat man im bisher ausgeschlossenen Fall $m = 0$. Man sieht, daß dann die klassische Energie (1.10) des Feldes $D$ endlich ist.

Und in der Tat ist das masselose Skalarfeld[v] der Skalenlimes des massiven Feldes für kleine Abstände [11, 13] und damit wegen der Unschärferelation für hohe Energien. Man darf erwarten, daß in diesem Limes zuvor eingeschlossenen Ladungen nun Zustände endlicher Energie entsprechen. Dieser Frage gehen wir in Kapitel 6 mit positiver Antwort nach.

Die sich anschließende Frage, ob auch die geladenen Zustände der masselosen Theorie eine Teilchen-Interpretation in Sinne von Wigner [27] oder im Sinne von Infrateilchen [10, 19, 24] haben, wird in Kapitel 7 untersucht.

## 1.5 Schwierigkeiten im Fall $m = 0$

Im Falle $m = 0$ sieht man, daß die symplektische Form (1.4) mit $\omega(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|$ immer noch für alle $f, g \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ existiert, denn bei $\mathbf{p} = 0$ wird nur der Imaginärteil des Produktes $\overline{\tilde{f}}\tilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$ getestet, der aber bei Null linear gegen Null geht, da $f$ und

[v]tensoriert mit einer Abelschen Algebra, die wieder als zu einer irrelevanten klassischen Variablen gehörig interpretiert wird

$g$ beide reelle Testfunktionen sind. (Die Definition des Feldstärketensors und der Gaußsche Satz gelten unabhängig von $m$.)

Das das Vakuum charakterisierende Skalarprodukt aber divergiert (ist „unendlich"), wenn nicht $\widetilde{f}(0) = 0$ oder $\widetilde{g}(0) = 0$. Es ist daher nicht möglich, die (gesamte) Feldalgebra in einem Fockraum darzustellen. Wir verlieren zunächst die übliche Teilcheninterpretation für die Feldanregungen: Es gibt keine Erzeuger und Vernichter, gewisse Felder haben in allen Zuständen unendliche Schwankungsquadrate.

Allerdings gewinnt man eine natürliche Fortsetzung des Vakuumzustandes der Weyl-Algebra (per Skalenlimes) auf den masselosen Fall, indem man setzt [11]:

$$\omega_0(W(f)) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}\|f\|_0^2} & \widetilde{f}(0) = 0 \\ 0 & \widetilde{f}(0) \neq 0 \end{cases}.$$

$\|\cdot\|_0$ ist die Norm, die man auf der Menge der Funktionen $f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)/\!\sim, \widetilde{f} = 0$ für $m = 0$ aus $\|\cdot\|$ erhält. Dieser Zustand ist wieder rein, [2, Prop. 2.2] und Satz 2.6[vi], allerdings ist er nicht regulär [6, Kap. 5.2.3], denn für $f$ mit $\widetilde{f}(0) \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\lambda \to 0} \omega_0(W(\lambda f)) = 0 \neq \omega_0(W(\lim_{\lambda \to 0} \lambda f)) = 1.$$

In Übereinstimmung mit dem zuvor Gesagten kann man in der Vakuumdarstellung keine Feldoperatoren (durch Ableitung von $W(\lambda f)$ an der Stelle $\lambda = 0$) aus den Weyloperatoren gewinnen. Dies gilt auch für alle anderen physikalisch interessierenden Zustände kraft lokaler Normalität. Denn letztere Zustände lassen sich, wenn man sie auf alle Observablen einschränkt, die in einem beliebigen endlichen Gebiet räumlich und zeitlich lokalisiert sind, durch einen positiven normierten Spurklasseoperator im Vakuumhilbertraum ausdrücken („Dichtematrix").

[vi] Satz 2.6 ist Lemma 4.1 in [1].

# Kapitel 2

# Der symplektische Raum $\mathcal{L}$ und die Weylalgebra $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$

## 2.1 Das Modell

In der Einleitung haben wir dargelegt, daß wir ein masseloses freies reelles Skalarfeld in 1+1 Dimension betrachten wollen. Dieses Feld soll im Rahmen des Weyl-Algebra-Formalismus [6] beschrieben werden. In 1+1 Dimensionen ist die Kommutatorfunktion

$$\Delta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \epsilon(p_0)\delta(p^2)e^{-ipx}d^2p = -\frac{1}{2}\Theta(\mathbf{x}+x_0) + \frac{1}{2}\Theta(\mathbf{x}-x_0)$$

Lösung der masselosen Klein-Gordon-Gleichung $\Box\Delta(x) = 0$ zu den gleichen Anfangswerten wie in (1.1).

Sie definiert als Integralkern eine symplektische Form $\sigma$ auf dem Raum der Wellenfunktionen $\mathcal{L} := \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)/\sim$ ($\sim$ ist die durch $f \sim g :\Leftrightarrow \Box(f-g) = 0$ definierte Äquivalenzrelation):

$$\begin{aligned}
\sigma(f,g) :=& \int f(x)\Delta(x-y)g(y)d^2x d^2y, \quad f,g \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) \\
=& 2\pi\frac{1}{i}\int \overline{\widetilde{f}(p)}\widetilde{g}(p)\epsilon(p_0)\delta(p^2)d^2p \\
=& 4\pi\,\mathrm{Im}\int \overline{\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})}\widetilde{g}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\
=& 4\pi\,\mathrm{Im}\int \overline{\widetilde{f}(p)}\widetilde{g}(p)\Theta(p_0)\delta(p^2)d^2p.
\end{aligned}$$

Da wir meist im Impulsraum rechnen (hier bedeutet die Äquivalenzrelation die Einschränkung auf den Rand des Vorwärtslichtkegels), unterscheiden wir auch hier nicht zwischen der Funktion $f$ und ihrer Äquivalenzklasse $[f]$.

Führen wir folgende Notation ein:

$$\begin{aligned}
&f \prec g, && \text{wenn } \operatorname{supp} f \text{ raumartig links von } \operatorname{supp} g \ (f \text{ links von } g), \\
&f \succ g: && f \text{ rechts von } g, \\
&f \curlyvee g: && f \text{ in der Vergangenheit von } g, \\
&f \curlywedge g: && f \text{ in der Zukunft von } g.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Spitze des Symbols weist also in die Richtung, in der von $g$ aus gesehen $f$ seinen Träger hat.

Da $\Delta$ eine Summe von $\Theta$-Funktionen im Ortsraum ist, gilt für $\sigma(g,f)$:

$$\sigma(g,f) = 2\pi\widetilde{g}(0)2\pi\widetilde{f}(0)\begin{cases}0 & f \prec g \vee f \succ g \\ \frac{1}{2} & f \curlywedge g \\ -\frac{1}{2} & f \curlyvee g\end{cases} . \tag{2.2}$$

Die Weylalgebra $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$ über $\mathcal{L}$ wird erzeugt von Elementen $W(f), f \in \mathcal{L}$ mit den Vertauschungsrelationen (1.3).

**Definition 2.1** Wir definieren:

- $\mathcal{L}_0 := \{f \in \mathcal{L} | \widetilde{f}(0) = 0\}$,
- die Unteralgebra $\mathfrak{W}(\mathcal{L}_0) \subset \mathfrak{W}(\mathcal{L})$, die Weylalgebra über $\mathcal{L}_0$,
- eine Hilbertnorm

  $$||f||_0^2 := 4\pi \int |\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}, \quad f \in \mathcal{L}_0$$

  auf $\mathcal{L}_0$. Für $f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$ divergiert dieses Integral.
- einen reinen[2, Prop. 3.3, Lemma 4.1] nicht-regulären Vakuumzustand $\omega_0$ (n.b. kein Fockzustand) auf $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$ durch

  $$\omega_0(W(f)) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}||f||_0^2} & f \in \mathcal{L}_0 \\ 0 & f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0 \end{cases} .$$

Einige häufig verwendete Aussagen und Definitionen im Zusammenhang mit $||\cdot||_0$ fassen wir zusammen in der

**Bemerkung 2.2**

1. Zu $||\cdot||_0$ gibt es ein reelles Skalarprodukt auf $\mathcal{L}_0$:

   $$\begin{aligned}(f,g)_0 :=& \int \overline{\widetilde{f}(p)}\widetilde{g}(p)\delta(p^2)d^2p \\ =& 4\pi \operatorname{Re} \int \overline{\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})}\widetilde{g}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ =& 4\pi \operatorname{Re} \int \overline{\widetilde{f}(p)}\widetilde{g}(p)\Theta(p_0)\delta(p^2)d^2p.\end{aligned} \tag{2.3}$$

2. Wir sagen, eine Folge $f_n \in \mathcal{L}$ ist eine Cauchy-Folge bzgl. $||\cdot||_0$, wenn für hinreichend große Indizes gilt:

   (a) $f_m - f_n \in \mathcal{L}_0$,

   (b) $||f_m - f_n||_0 \to 0$.

   Entsprechend reden wir von $||\cdot||_0$-stetig etc.

3. Auf ganz $\mathcal{L}$ definierte Funktionale sind schon dann stetig in der $||\cdot||_0$-Topologie, wenn ihre Einschränkung auf $\mathcal{L}_0$ stetig ist. Denn ein Funktional auf $\mathcal{L}$ ist durch seine Werte auf $\mathcal{L}_0$ schon eindeutig bis auf ein Funktional über $\mathcal{L}/\mathcal{L}_0 \cong \mathbb{R}$ bestimmt und auf diesem Quotientenraum ist die eben definierte Topologie diskret.

4. Sei $\mathfrak{J}$ die auf $\mathcal{L}_0$ erklärte lineare Abbildung

$$\mathfrak{J} : f \mapsto \mathfrak{J}f, \quad \widetilde{\mathfrak{J}f}(p) = i\epsilon(p_0)\widetilde{f}(p).$$

$\mathfrak{J}f$ wird nicht mehr in $\mathcal{L}_0$ liegen. Ausdrücke wie $\sigma(f, \mathfrak{J}g)$ machen dennoch Sinn. Denn sieht man sich die Integralausdrücke für $\sigma(\cdot,\cdot)$ und $(\cdot,\cdot)_0$ im Impulsraum an, so gilt $\forall f, g \in \mathcal{L}_0$:

   (a) $\sigma(f, \mathfrak{J}g) = -\sigma(\mathfrak{J}f, g) = (f, g)_0$,

   (b) $-\sigma(f, g) = (f, \mathfrak{J}g)_0$,

   (c) $\|\mathfrak{J}f\|_0 = \|f\|_0$.

5. Insbesondere wird $\sigma(\cdot,\cdot)$ auf $\mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}_0$ von $\|\cdot\|_0$ dominiert:

$$|\sigma(\cdot,\cdot)| = |(\cdot, \mathfrak{J}\cdot)_0| \leq \|\cdot\|_0\|\cdot\|_0$$

6. Wegen $\|\mathfrak{J}f\|_0 = \|f\|_0, f \in \mathcal{L}_0$ kann $\mathfrak{J}$ zu einem stetigen Operator („komplexe Struktur") $J_0 : \overline{\mathcal{L}_0} \to \overline{\mathcal{L}_0}$, $J_0^2 = -\mathbb{1}$ auf dem $\|\cdot\|_0$-Abschluß $\overline{\mathcal{L}_0}$ von $\mathcal{L}_0$ in $\|\cdot\|_0$ erweitert werden.

Da wir die Weyloperatoren als „exponenzierte Feldoperatoren" auffassen, ist die richtige Übertragung der kohärenten Zustände (1.8) folgende

**Definition 2.3** Ein durch

$$\omega_D(W(f)) := \omega_0 \circ \gamma_D(W(f)) = e^{iD(f)}\omega_0(W(f)),$$
$$\gamma_D(W(f)) := e^{iD(f)}W(f)$$

gegebener Zustand $\omega_D$ und $*$-Automorphismus $\gamma_D$ heißen *kohärent*, wobei $D$ aus dem algebraischen Dual $\mathcal{L}^{\#}$ von $\mathcal{L}$ stammt, d.h. ein nicht notwendig stetiges Funktional auf $\mathcal{L}$ darstellt. Der Zustand $\omega_D$ ist wieder rein.

Jeder Zustand führt durch die GNS-Konstruktion zu einer Darstellung von $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$ auf einem Hilbertraum:

**Definition 2.4** Die per GNS-Konstruktion [5] mit $\omega_0$ erhaltene Vakuumdarstellung wird bezeichnet als

$$\pi_0 := (W_0(\cdot), \mathcal{H}_0, \Omega).$$

Die Darstellungen

$$\pi_D := (W_D(\cdot), \mathcal{H}_0, \Omega) \quad \text{mit } W_D(f) := e^{iD(f)}W_0(f)$$

können wegen

$$(\Omega, W_D(f)\Omega)_{\mathcal{H}_0} = (\Omega, e^{iD(f)}W_0(f)\Omega)_{\mathcal{H}_0} = e^{iD(f)}\omega_0(W(f)) = \omega_D(W(f))$$

mit der kanonisch mit $\omega_D$ assoziierten GNS-Darstellung identifiziert werden, haben aber den Vorteil, daß sie auf demselben Hilbertraum $\mathcal{H}_0$ mit demselben zyklischen Vektor $\Omega$ wie die Vakuumdarstellung definiert sind.

Zur Verdeutlichung schreiben wir manchmal $\pi_0(W(f))$ statt $W_0(f)$, $\pi_D(W(f))$ statt $W_D(f)$. Keine dieser Darstellungen ist regulär.

**Bemerkung 2.5** Betrachten wir den Vakuumzustand $\omega_0$ eingeschränkt auf die Unteralgebra $\mathfrak{W}(\mathcal{L}_0)$, dann ist ihre GNS-Darstellung regulär. Das gilt auch für die Einschränkungen der kohärenten Zustände $\omega_D$.

Der von $W_D(\mathcal{L}_0)\Omega$ aufgespannte Hilbertraum ist sogar ein Fockraum, denn $\mathcal{L}_0$ mit $\|\cdot\|_0$ und der komplexen Struktur $J_0$ ist ein Prähilbertraum, deshalb gibt es in den Abschlüssen der Darstellungen sogar die Feldoperatoren $\phi_D(f)$, Teilchenerzeuger $a_D^*(f)$ und -vernichter $a_D(f), f \in \mathcal{L}_0$ [6, Lemma 5.2.12].

Das von $a_D^*(f), f \in \mathcal{L}_0$ erzeugte masselose Boson nennen wir „Photon".

Wir stellen noch fest, daß der Hilbertraum $\mathcal{H}_0$ nicht separabel ist. Denn für $\widetilde{f}(0) \neq \widetilde{g}(0)$ folgt

$$\langle W_0(f)\Omega, W_0(g)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} = 0,$$

d.h. es gibt überabzählbar viele paarweise zueinander orthogonale Elemente.

Daß aber $\|\cdot\|_0$ für unsere Zwecke nicht die richtige Topologie ist, zeigen der folgende Satz 2.6 und später Satz 3.1:

**Satz 2.6 ([1, 2])** [i] *Die durch $h \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$ auf $\mathcal{L}$ gegebenen Funktionale $\sigma(h,\cdot)$ sind nicht stetig in $\|\cdot\|_0$.*

Ladungsmessungen sind kraft des Gaußschen Satzes in 1+1 Dimensionen Differenzen von Feldstärkemessungen. Betrachten wir den durch $\sigma(h,\cdot)$ gegebenen kohärenten Zustand. Es ist $\sigma(h,g) = \frac{1}{2}4\pi^2\widetilde{h}(0)\widetilde{g}(0)$, falls $\operatorname{supp} g$ in der Zukunft von $\operatorname{supp} h$ liegt, und dieser Ausdruck ist Null, wenn $\operatorname{supp} g$ raumartig links von $\operatorname{supp} h$ liegt. Also sollten die Korrelationen zwischen Feldstärkemessungen in diesen beiden Gebieten andere sein als im Vakuumzustand. (Interpretation: Man hat eine Ladung $q = \frac{1}{2}2\pi\widetilde{h}(0)$ zwischen diesen beiden Gebieten.)

Deshalb sind die Funktionen mit obigen Lokalisierungseigenschaften gut geeignet für den Beweis unserer Aussage.

Beweis: Betrachten wir die Folge

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{n^2}g\left(\frac{x_0-2nr}{n},\frac{\mathbf{x}}{n}\right) - \frac{1}{n^2}g\left(\frac{x_0}{n},\frac{\mathbf{x}+2nr}{n}\right), \\ \widetilde{f_n}(p) &= (e^{2ip_0nr} - e^{2i\mathbf{p}nr})\widetilde{g}(np_0,n\mathbf{p}), \end{aligned}$$

wobei $g \in \mathcal{L}\setminus\mathcal{L}_0$ ist und $r$ so, daß beide $\operatorname{supp} h, \operatorname{supp} g \subset \mathcal{O}([-r,r])$, dem Doppelkegel mit Basis $[-r,r]$. Nun gilt für alle Folgenglieder:

1. $\sigma(h,f_n) = \frac{1}{2}2\pi\widetilde{h}(0)2\pi\widetilde{g}(0)$ aufgrund des bilokalisierten Trägers von $f_n$ – zeitlich nach $\operatorname{supp} h$, räumlich links von $\operatorname{supp} h$.

2. Da $e^{2i|\mathbf{p}|nr} - e^{2i\mathbf{p}nr} = 0$ für $\mathbf{p} \geq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f_n\|_0^2 &= 4\pi\int|\widetilde{f_n}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})|^2\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= 4\pi\int_{-\infty}^0|\widetilde{g}(n|\mathbf{p}|,n\mathbf{p})|^2|2i\sin(2\mathbf{p}nr)|^2\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= \not{c}, \end{aligned}$$

wie man durch Substitution $\mathbf{p} \mapsto \frac{1}{n}\mathbf{p}$ zeigt. Die Folge konvergiert nicht gegen Null, ist aber beschränkt.

[i] In [1] wird eine andere Folge verwendet, aus der aber die physikalische Bedeutung dieses Satzes nicht klar wird.

3. Für $\forall k \in \mathcal{L}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
(k, f_n)_0 &= 4\pi \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{0} \overline{\widetilde{k}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})}\widetilde{g}(n|\mathbf{p}|, n\mathbf{p})(-2i)\sin(2\mathbf{p}nr)\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\
&= 8\pi \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{0} \overline{\widetilde{k}(\frac{|\mathbf{p}|}{n}, \frac{\mathbf{p}}{n})}\widetilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})\sin(2\mathbf{p}r)\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

nach dem Theorem der dominierten Konvergenz, denn $\widetilde{k}(0) = 0$. Also konvergiert $f_n$ $\|\cdot\|_0$-schwach gegen Null. (Wegen der $\|\cdot\|_0$-Beschränktheit der Folge reicht es, dies auf dem Prähilbertraum $\mathcal{L}_0$ zu testen.)

4. Wir folgern, daß $\sigma(h, \cdot)$ nicht $\|\cdot\|_0$-schwach stetig ist, also auch nicht $\|\cdot\|_0$-stetig (i.e.$\|\cdot\|_0$-stark-stetig) [16, Kap. 2.3, Cor. 1].

Q.E.D.

## 2.2 Die Norm $\|\cdot\|_h$

Wir benötigen – wie Satz 2.6 gezeigt hat – eine andere Topologie auf dem Raum der Wellenfunktionen $\mathcal{L}$.

**Definition 2.7** Für festes $h \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$ bezeichne $\|\cdot\|_h$ folgende Norm auf $\mathcal{L}_0$:

$$\|f\|_h := \sqrt{\|f\|_0^2 + \sigma(h, f)^2}, \quad f \in \mathcal{L}_0.$$

Wieder fassen wir einige Aussagen und Definitionen rund um $\|\cdot\|_h$ zusammen.

**Bemerkung 2.8**

1. Wir sagen, $f_n \in \mathcal{L}$ ist eine $\|\cdot\|_h$-Cauchyfolge, falls für hinreichend große Indizes $m, n$

   (a) $f_m - f_n \in \mathcal{L}_0$ und

   (b) $\|f_m - f_n\|_h \to 0$.

   Der $\|\cdot\|_h$-Abschluß von $\mathcal{L}_0$ sei mit $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$, der von $\mathcal{L}$ mit $\overline{\mathcal{L}}^\sigma = \mathcal{L} + \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ bezeichnet.

   Diese Topologie wurde unabhängig von uns in einem ähnlichen Zusammenhang schon von Acerbi [1] entdeckt.

2. Die durch $g, h \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$ gegebenen Normen $\|\cdot\|_g$ und $\|\cdot\|_h$ sind äquivalent, denn mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so, daß $h - \lambda g \in \mathcal{L}_0$ (ein solches $\lambda$ existiert, denn beide $\widetilde{g}(0), \widetilde{h}(0) \neq 0$), gilt $\forall f \in \mathcal{L}_0$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_h^2 = \|f\|_0^2 + \sigma(h, f)^2 &= \|f\|_0^2 + (\sigma(h - \lambda g, f) + \sigma(\lambda g, f))^2 \\
&\leq \|f\|_0^2 + 2\left(\sigma(h - \lambda g, f)^2 + \sigma(\lambda g, f)^2\right) \\
&\leq \|f\|_0^2 + 2\left(\|h - \lambda g\|_0^2 \|f\|_0^2 + \lambda^2 \sigma(g, f)^2\right) \\
&\leq \left(1 + 2\|h - \lambda g\|_0^2 + 2\lambda^2\right)\|f\|_g^2
\end{aligned}$$

   und umgekehrt mit $g - \frac{1}{\lambda}h \in \mathcal{L}_0$.
   Also sind die entsprechenden Abschlüsse von $\mathcal{L}_0$ gleich, was die Notation $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ rechtfertigt.

3. Die durch $\|\cdot\|_h, h \in \mathcal{L}_0$ wie oben gegebenen Normen ergeben topologisch nichts Neues, da $\sigma(h,\cdot), h \in \mathcal{L}_0$ stetig in der $\|\cdot\|_0$-Topologie auf $\mathcal{L}_0$ ist.

4. $\|\cdot\|_0$ wird von $\|\cdot\|_h$ dominiert, insbesondere sind $\|\cdot\|_0$ und $(\cdot,\cdot)_0$ stetig in $\|\cdot\|_h$, können also auf ganz $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ fortgesetzt werden.

5. Es gilt $|\sigma(\cdot,\cdot)| \leq \|\cdot\|_0\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_h\|\cdot\|_h$, $\sigma(\cdot,\cdot)$ kann also $\|\cdot\|_h$-stetig auf ganz $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma \times \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ fortgesetzt werden.

6. Die Norm $\|\cdot\|_h$ ist eine Hilbertnorm mit reellem Skalarprodukt
$$(f,g)_h := (f,g)_0 + \sigma(h,f)\sigma(h,g).$$

7. Auf ganz $\mathcal{L}$ definierte Funktionale sind schon dann stetig in der $\|\cdot\|_h$-Topologie, wenn ihre Einschränkung auf $\mathcal{L}_0$ $\|\cdot\|_h$-stetig ist (parallele Aussage zu Bemerkung 2.2, Punkt 3).

8. Für jedes Gebiet $\mathcal{O}$ und jede Familie von Funktionen $\{f \in \mathcal{L}, \operatorname{supp} f \in \mathcal{O}'\}$, kann man eine zu $\|\cdot\|_h$ äquivalente Norm $\|\cdot\|_g$ mit $g \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0, \operatorname{supp} g \in \mathcal{O}$ wählen. Auf der obigen Menge von Funktionen gilt dann $\|\cdot\|_g = \|\cdot\|_0$, da $\sigma(g,f) = 0$. Lokal definieren damit $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_h$ die gleiche Topologie.

9. Für $h \in \mathcal{L}$ ist $\sigma(h,\cdot)$ stetig auf $\mathcal{L}_0$ in $\|\cdot\|_h$-Topologie, also eindeutig erweiterbar auf $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$.

10. Es existiert sogar $\sigma(g,\cdot), g \in \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ als Funktional auf $\mathcal{L}$: Sei $\mathcal{L}_0 \ni g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_h} g$ und $k \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$, dann gilt $|\sigma(g_n - g_m, k)| \leq \|g_n - g_m\|_k \leq c\!\!/\|g_n - g_m\|_h \to 0$. Das bedeutet, daß wir $\sigma(g,k) := \lim_{n\to\infty} \sigma(g_n,k)$ setzen können.

11. $\sigma(\cdot,\cdot)$ kann ebenso auf $\overline{\mathcal{L}}^\sigma \times \overline{\mathcal{L}}^\sigma$ fortgesetzt werden und ist dort immer noch in beiden Argumenten gemeinsam stetig in der $\|\cdot\|_h$-Topologie. Diese Aussage führt man auf die entsprechende auf $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma \times \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ zurück, indem man beachtet, daß für $\|\cdot\|_h$-Cauchy-Folgen $\{f_n\}$ in $\mathcal{L}$ für hinreichend große Indizes $n$ $\widetilde{f_n}(0)$ konstant sein muß. Man kann mithin in einen konstanten Anteil in $\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}_0$ und eine Folge in $\mathcal{L}_0$ zerlegen.

Häufig betrachtet man auf Weyl-Algebren Vakuumzustände, die sich wie in (1.5) aus einem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_\mathbb{R}$ auf dem Raum der Wellenfunktionen so ergeben, daß es im Abschluß dieses Raumes einen stetigen Operator $J$ (komplexe Struktur) mit $J^2 = -1$ und $\sigma(\cdot, J\cdot) = (\cdot,\cdot)_\mathbb{R}$ gibt. Der Raum der Wellenfunktionen ist dann ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_\mathbb{C} = (\cdot,\cdot)_\mathbb{R} + i\sigma(\cdot,\cdot)$.

Unsere Situation unterscheidet sich davon in zwei Punkten. Zum einen ist der Vakuumzustand durch das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_0$ nur auf $\mathcal{L}_0$ gegeben. Zum anderen definiert es nicht die richtige Topologie.

Daher ist fraglich, ob die in Bemerkung 2.2, Punkt 4 eingeführte Abbildung $\mathfrak{J}$ zu einem $\|\cdot\|_h$-beschränkten Operator auf $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ fortgesetzt werden kann. Es ist nicht einmal klar, ob die Abbildung $\widetilde{f}(p) \mapsto i\epsilon(p_0)\widetilde{f}(p), f \in \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ den Raum $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ invariant läßt. Wir vermuten:

**Vermutung 2.9** *Die Abbildung $\mathfrak{J} : \mathcal{L}_0 \to \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ ist nicht stetig in $\|\cdot\|_h$, kann also nicht zu einem auf ganz $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ definierten beschränkten linearen Operator erweitert werden.*

*Oder schwächer: Unter $\widetilde{f}(p) \mapsto i\epsilon(p_0)\widetilde{f}(p), f \in \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ ist der Raum $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ nicht invariant.*

Immerhin gilt der wichtige

**Satz 2.10** *Sei* $f \in \mathcal{L}_0$*, dann gilt* $\mathfrak{J} f \in \overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$.

Leider konnten wir die Vermutung nicht rigoros beweisen. Ihre Richtigkeit gäbe die Gewißheit, daß der Aufwand in den nächsten beiden Kapiteln nicht umsonst ist. Ein plausibles Argument dafür, daß diese Vermutung richtig ist, geben wir im Beweis von Satz 2.10, welcher recht technisch ist und deshalb auf Anhang A.2 verschoben worden ist.

# Kapitel 3

# Der Abschluß von $\pi_0(\mathfrak{W}(\mathcal{L}))$

Im folgenden fixieren wir $\|\cdot\|_h$ mit einem beliebigen $h \in \mathcal{L}$, $2\pi\widetilde{h}(0) = 1$. Dies bedeutet keine Einschränkung, denn alle Normen von diesem Typ sind äquivalent. Jedes $f \in \mathcal{L}$ können wir eindeutig in einen Teil parallel zu $h$ und einen Teil aus $\mathcal{L}_0$ zerlegen:

$$f = 2\pi\widetilde{f}(0)h + f_0 \quad \text{mit} \quad f_0 := f - 2\pi\widetilde{f}(0)h \in \mathcal{L}_0. \tag{3.1}$$

Wir wollen versuchen, den Abschluß von $\pi_0(\mathfrak{W}(\mathcal{L}))$ zu charakterisieren.

**Satz 3.1** *Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}$. $W_0(f_n)$ konvergiert genau dann in der stark-$*$-Topologie auf $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$, wenn $f_n$ eine $\|\cdot\|_h$-Cauchyfolge ist (im Sinne von 2.8).*

*Die Abbildung $\mathcal{L} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_0), f \mapsto W_0(f)$ ist (bi-)stetig in $\|\cdot\|_h$ auf $\mathcal{L}$ einerseits und in der stark-$*$-Operatortopologie auf $\mathcal{H}_0$ andererseits.*

Beweis: Da $\{W_0(f_n)\}$ als Folge unitärer Operatoren uniform normbeschränkt ist, genügt es, diese Behauptung auf Vektoren der Form $W_0(g)\Omega, g \in \mathcal{L}$ zu zeigen, denn deren Linearkombinationen liegen dicht in $\mathcal{H}_0$ (Mengen mit dieser Eigenschaft heißen *total*). Es gilt für $\forall g \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
&\|(W_0(f_n) - W_0(f_m))W_0(g)\Omega\|^2_{\mathcal{H}_0} \\
=&\|W_0(g)(e^{-i\sigma(f_n,g)}W_0(f_n) - e^{-i\sigma(f_m,g)}W_0(f_m))\Omega\|^2_{\mathcal{H}_0} \\
=&\|e^{-i\sigma(f_n,g)}W_0(f_n) - e^{-i\sigma(f_m,g)}W_0(f_m)\Omega\|^2_{\mathcal{H}_0}, \quad \text{denn } W_0(g) \text{ ist unitär,} \\
=&2 - 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\sigma(f_n,g)}e^{-i\sigma(f_m,g)}\omega_0(W_0(-f_n)W_0(f_m))\right) \\
=&2 - 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\sigma(f_n-f_m,g)}e^{\frac{i}{2}\sigma(f_n,f_m)}\right)\omega_0(W_0(f_m - f_n)) \\
=&2 - 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\sigma(f_n-f_m,g)+\frac{i}{2}\sigma(f_n,f_m)}\right)e^{-\frac{1}{4}\|f_m-f_n\|_0^2},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
&\|(W_0(f_n) - W_0(f_m))W_0(g)\Omega\|_{\mathcal{H}_0} \to 0, \quad \forall g \in \mathcal{L} \\
\Leftrightarrow &\,\mathrm{Re}\left(e^{i\sigma(f_n-f_m,g)+\frac{i}{2}\sigma(f_n,f_m)}\right)e^{-\frac{1}{4}\|f_m-f_n\|_0^2} \to 1 \quad \forall g \in \mathcal{L} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} f_m - f_n \in \mathcal{L}_0 \\ \|f_m - f_n\|_0 \to 0 \\ \sigma(f_m - f_n, g) \to 0 \quad \forall g \end{cases} \qquad \wedge \quad \sigma(f_m, f_n) \to 0. \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} f_m - f_n \in \mathcal{L}_0 \\ \|f_m - f_n\|_g \to 0 \quad \forall g \end{cases} \qquad \wedge \quad \sigma(f_m, f_n) \to 0
\end{aligned}$$

Wegen Bemerkung 2.8 reicht $\|\cdot\|_h \to 0$ mit dem oben gewählten festen $h$ aus, damit alle anderen solchen Normen $\|\cdot\|_g$ ebenfalls gegen Null konvergieren:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_m - f_n \in \mathcal{L}_0 \\ \|f_m - f_n\|_h \to 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \sigma(f_m, f_n) \to 0$$

Die beiden linken Bedingungen sind genau die definierenden Eigenschaften einer $\|\cdot\|_h$-Cauchyfolge in $\mathcal{L}$, und die rechte Bedingung folgt wegen der gemeinsamen Stetigkeit in beiden Argumenten (Bem. 2.8) schon aus diesen.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_m - f_n \in \mathcal{L}_0 \\ \|f_m - f_n\|_h \to 0. \end{cases}$$

Analog zeigt man, daß auch $W_0(f_n)^* = W_0(-f_n)$ konvergiert. Q.E.D.

Falls $g, f_n \in \mathcal{L}_0$, genügt Konvergenz in $\|\cdot\|_0$ für $f_n$, denn in diesem Fall folgt aus $\|f_n\|_0 \to 0$ schon $\sigma(g, f_m - f_n) \to 0$, $\forall g \in \mathcal{L}_0$.

**Folgerung 3.2** *Für $\forall f \in \overline{\mathcal{L}}^\sigma$ sind die Operatoren*

$$W_0(f) := \lim_{n\to\infty} W_0(f_n)$$

*(Konvergenz im stark-$*$-Sinne, $\mathcal{L} \ni f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_h} f$) wohldefinierte unitäre Operatoren mit $W_0(f)^* = W_0(-f)$ und genügen den Vertauschungsrelationen ($g \in \overline{\mathcal{L}}^\sigma$):*

$$W_0(f)W_0(g) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)} W_0(f+g)$$

Beweis: Als stark-$*$-Limes von unitären Operatoren ist $W_0(f)$ wieder unitär, und sein adjungierter Operator ist der Limes der adjungierten Operatoren.

Für die Vertauschungsrelationen rechnet man die Wirkung von $W_0(f)W_0(g)$ und $W_0(f+g)$ auf Vektoren der Form $W_0(k)\Omega, k \in \mathcal{L}$ über ihre Definition nach:

$$\begin{aligned} W_0(f)W_0(g)W_0(k)\Omega &= \lim_{n,m\to\infty} W_0(f_n)W_0(g_m)W_0(k)\Omega \\ &= \lim_{n,m\to\infty} e^{-\frac{i}{2}\sigma(f_n,g_m)} W_0(f_n+g_m)W_0(k)\Omega \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)} W_0(f+g)W_0(k)\Omega, \end{aligned}$$

denn $\sigma(\cdot,\cdot)$ ist gleichzeitig stetig in beiden Argumenten. Q.E.D.

Insbesondere sind die Operatoren $W_0(\mathfrak{J}f), f \in \mathcal{L}_0$ wohldefiniert, denn $\mathfrak{J}\mathcal{L}_0 \subset \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ (Satz 2.10). Obwohl $\mathfrak{J}$ vermutlich nicht $\|\cdot\|_h$-stetig ist, bekommen wir folgendes Resultat:

**Satz 3.3** *Sei $\mathcal{L}_0 \ni f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_h} f \in \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$, dann hat $W_0(\mathfrak{J}f_n)$ stark-$*$-Limespunkte, die wir mit $W_0^\eta(\mathfrak{J}f)$ bezeichnen wollen. Sie werden indiziert durch nicht notwendig stetige Gruppenhomomorphismen $\eta : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{T}, \cdot)$ aus $\mathbb{T}^\mathbb{R}$.*
*Die Limespunkte haben folgende Eigenschaften:*

1. *$W_0^\eta(\mathfrak{J}f)$ ist unitär,*
2. *$W_0^\eta(\mathfrak{J}f)^* = W_0^{\bar\eta}(-\mathfrak{J}f)$,*
3. *$W_0^\eta(\mathfrak{J}f)W_0(g)\Omega = \eta(2\pi\tilde{g}(0))e^{i(f,g_0)_0} W_0(g) \lim_{n\to\infty} W_0(\mathfrak{J}f_n)\Omega, \quad \forall g \in \mathcal{L}$,*[i] [ii]

[i]Beachte, daß $(f, g_0)_0 =$„$-\sigma(\mathfrak{J}f, g_0)$“. Wir haben $\mathfrak{J}$ aber nicht auf $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ erklärt.

[ii]Man kann zeigen, daß diese Aussagen für $g \in \overline{\mathcal{L}}^\sigma$ gültig bleiben, aber das wird im folgenden nicht benötigt.

4. $\mathrm{Ad}_{W_0^\eta(\eth f)}(W_0(g)) = \eta(2\pi\widetilde{g}(0))e^{i(f,g_0)_0}W_0(g), \quad \forall g \in \mathcal{L}$.[i ii]

BEWEIS: Es gilt mit $g \in \mathcal{L}$, $f_n \in \mathcal{L}_0$, also mit $\eth f_n \in \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$:

$$\begin{aligned} W_0(\eth f_n)W_0(g)\Omega &= e^{-i\sigma(\eth f_n,g)}W_0(g)W_0(\eth f_n)\Omega \\ &= e^{-i2\pi\widetilde{g}(0)\sigma(\eth f_n,h)}e^{-i\sigma(\eth f_n,g_0)}W_0(g)W_0(\eth f_n)\Omega \end{aligned}$$

Betrachten wir die Faktoren des letzten Ausdrucks einzeln.

1. $W_0(\eth f_n)\Omega$ konvergiert in $\mathcal{H}_0$, wie man analog zu Satz 3.1 beweist. Denn $\eth f_n$ konvergiert in $\|\cdot\|_0$, da $\|\eth f_n\|_0 = \|f_n\|_0$. (Beachte den Kommentar nach dem Beweis von Satz 3.1.)

2. $-\sigma(\eth f_n, g_0) = (f_n, g_0)_0$ konvergiert, denn $(\cdot, g_0)_0$ ist $\|\cdot\|_0$-stetig, *a fortiori* $\|\cdot\|_h$-stetig, und zwar gegen $(f, g_0)_0$.

3. Die Funktionen $x \mapsto \eta_n(x) := e^{-ix\sigma(\eth f_n,h)}$ sind Elemente aus $\mathbb{T}^\mathbb{R}$ (kraft der durch ihre Graphen gegebenen Punktmengen), welches nach Tychonoffs Theorem [21, Thm. IV.5] kompakt in der von $\mathbb{T}$ induzierten Produkt-Topologie ist (i.e. Topologie der punktweisen Konvergenz für *Funktionenfolgen*) (vgl. [14, Kap. 3]).

   Also gibt es konvergente *Unternetze* $\eta_\nu \to \eta$ der Folge $\eta_n$ (indiziert durch eine geeignete gerichtete Menge $\{\nu\}$). Der Limes $\eta$ von $\eta_\nu$ ist wieder ein Gruppenhomomorphismus, allerdings nicht notwendig stetig („Horrorfunktionen").

   Für gegebenes Netz $\eta_\nu$ liegt die Funktion $\eta$ fest und damit der Limes des Netzes $W_0(\eth f_\nu)$, der durch $\eta$ indiziert werden kann.

4. Der Operator (in suggestiver Schreibweise)[i] $W_0^\eta(\eth f)$ wird nun mithilfe des Unternetzes $W_0(\eth f_\nu)$ durch die Wirkung auf $W_0(g)\Omega, g \in \mathcal{L}$ definiert:

$$\begin{aligned} W_0^\eta(\eth f)W_0(g)\Omega :=& \lim_\nu W_0(\eth f_\nu)W_0(g)\Omega \\ =& \eta(2\pi\widetilde{g}(0))e^{i(f,g_0)_0}W_0(g) \lim_{n\to\infty} W_0(\eth f_n)\Omega. \end{aligned}$$

   Auch $W_0(-\eth f_\nu)$ konvergiert, und zwar gegen $W_0^{\bar\eta}(-\eth f)$, denn $\eta_\nu(-x)$ konvergiert gegen $\bar\eta(x)$. $W_0(\eth f_\nu)$ konvergiert mithin im stark-$*$-Sinne. Der Grenzwert ist wieder unitär mit Inversem $W_0^{\bar\eta}(-\eth f)$.

   Die Wirkung von $\mathrm{Ad}_{W_0^\eta(\eth f)}(\cdot)$ auf $W_0(g), g \in \mathcal{L}$ rechnet man aus, indem man die Wirkung von $W_0^\eta(\eth f)W_0(g)$ auf $W_0(h)\Omega, h \in \mathcal{L}$ betrachtet.

Q.E.D.

# Kapitel 4

# Sektorstruktur der kohärenten Automorphismen

Um die Sektorstruktur der kohärenten Zustände aufzuklären, soll nun die Frage untersucht werden, welche kohärenten Automorphismen durch unitäre Operatoren auf $\mathcal{H}_0$ implementiert werden können. Diese Frage wird beantwortet durch den

**Satz 4.1** *Der durch $D \in \mathcal{L}^{\#}$ gegebene Automorphismus $\gamma_D : W(f) \mapsto e^{iD(f)}W(f)$ ist genau dann in der Vakuum-Darstellung $\pi_0$ unitär implementierbar, wenn $D$ $\|\cdot\|_h$-stetig ist.*

Zu seinem Beweis ist neben den Vorarbeiten in Kapitel 3 noch eine weitere Aussage nötig. Als besonders hilfreich hierbei und noch einigem anderen erweist sich der folgende

**Hilfssatz 4.2** *Sei $\gamma$ der durch $\gamma(W(f)) := \eta(2\pi\widetilde{f}(0))W(f),\ f \in \mathcal{L}$ auf $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$ gegebene $*$-Automorphismus, wobei $\eta$ ein nicht notwendig stetiger Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{T}, \cdot)$ ist. Dann gilt*

$$\omega_0 \circ \gamma = \omega_0.$$

*D.h. $\omega_0$ ist invariant unter $\gamma$.*

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}(\omega_0 \circ \gamma)(W(f)) = \omega_0(\gamma(W(f))) &= \eta(2\pi\widetilde{f}(0))\omega_0(W(f)) \\ &= \begin{cases} \omega_0(W(f)) & f \in \mathcal{L}_0 \\ 0 & f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0 \end{cases} = \omega_0(W(f)),\end{aligned}$$

denn $\eta(2\pi\widetilde{f}(0)) = 1$ für $f \in \mathcal{L}_0$ und $\omega_0(W(f)) = 0$ auf $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$.

Dann ist $\omega_0$ auch invariant auf dem $C^*$-Abschluß der linearen Hülle der $W(f)$, d.h. auf $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$. Q.E.D.

Dieser Hilfssatz besagt physikalisch, daß in unserem Modell der absolute Wert der Feldstärke keine Rolle spielt: Wir können immer eine Konstante addieren. Das korrespondiert damit, daß wir die Feldoperatoren $\Phi(f), f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$, die den absoluten Wert der Feldstärken messen könnten, nicht definieren können, da sie unendlich große Schwankungsquadrate haben. Ihre exponenzierten Vettern $W(f)$ liefern wegen dieser Schwankungsquadrate in jedem kohärenten Zustand den Erwartungswert Null.

Mit Standardmethoden beweisen wir die

**Folgerung 4.3** *Sei $\gamma$ wie in Hilfssatz 4.2, dann ist $\gamma$ in der Vakuumdarstellung $\pi_0$ unitär implementierbar.*

Beweis z.B. [17, S. 132]: Definiere einen linearen Operator $V$ zunächst auf $\pi_0(\mathfrak{W}(\mathcal{L}))\Omega$ durch

$$V\pi_0(A)\Omega := \pi_0(\gamma(A))\Omega, A \in \mathfrak{W}(\mathcal{L}).$$

Dieser Operator

1. ist wohldefiniert, sogar isometrisch auf dichter Menge in $\mathcal{H}_0$, denn

$$\begin{aligned}\|\pi_0(\gamma(A))\Omega\|^2_{\mathcal{H}_0} &= \omega_0(\gamma(A)^*\gamma(A)) \\ &= \omega_0(\gamma(A^*A)) = \omega_0(A^*A) = \|\pi_0(A)\Omega\|^2_{\mathcal{H}_0}\end{aligned}$$

   nach Hilfssatz 4.2,

2. er ist linear, denn $\pi_0$ ist linear und

3. hat in $\mathcal{H}_0$ dichtes Bild, denn $\gamma$ ist umkehrbar.

$V$ ist daher abschließbar zu einem auf ganz $\mathcal{H}_0$ definierten unitären Operator (wieder mit $V$ bezeichnet). $V$ implementiert $\gamma$ in der Vakuumdarstellung $\pi_0$, denn mit $f, g \in \mathcal{L}$ folgt

$$\begin{aligned}V\pi_0(W(f))\pi_0(W(g))\Omega =& e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}V\pi_0(W(f+g))\Omega = e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,g)}\pi_0(\gamma(W(f+g)))\Omega \\ =&\pi_0(\gamma(W(f))\gamma(W(g)))\Omega = \pi_0(\gamma(W(f)))\pi_0(\gamma(W(g)))\Omega \\ =&\pi_0(\gamma(W(f)))V\pi_0(W(g))\Omega.\end{aligned}$$

D.h. auf einer dichten Menge in $\mathcal{H}_0$ (und damit auf ganz $\mathcal{H}_0$, denn $V$ ist $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_0}$-stetig) gilt

$$\begin{aligned}&V\pi_0(W(f)) = \pi_0(\gamma(W(f)))V \\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{Ad}_V(\pi_0(W(f))) = \pi_0(\gamma(W(f))).\end{aligned}$$

Q.E.D.

Jetzt können wir den Beweis der zentralen Aussage 4.1 antreten.
Beweis von Satz 4.1:

**„⇒“:** Sei $W_D(f) = U_D W_0(f) U_D^*$ für $\forall f \in \mathcal{L}$ mit einem unitären $U_D \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}e^{iD(f)}\langle\Omega, W_0(f)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \langle\Omega, W_D(f)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} \\ &= \langle\Omega, U_D W_0(f) U_D^*\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}.\end{aligned}$$

Läßt man $f \in \mathcal{L}_0$ bzgl. $\|\cdot\|_h$ gegen Null gehen, so geht der dritte Term gegen Eins, denn $f \mapsto W_0(f)$ ist nach Satz 3.1 $\|\cdot\|_h$-stark-$*$-stetig. Aus diesem Grunde geht auch $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_0}$ im ersten Term gegen Eins.

Damit muß $e^{iD(f)}$ gegen Eins gehen. Wegen der Linearität von $D(f)$ folgt $D(f) \to 0$. Also ist $D$ $\|\cdot\|_h$-stetig.

„$\Leftarrow$“: Sei $D$ $\|\cdot\|_h$-stetig.

1. Wir zerlegen $f$ wie in (3.1) und definieren $D_0(f) := D(f_0)$, welches wiederum $\|\cdot\|_h$-stetig ist. Wir zerlegen ferner $D$ in zwei Funktionale

$$D(f) = D(2\pi\widetilde{f}(0)h) + D(f_0) = 2\pi\widetilde{f}(0)D(h) + D_0(f)$$

und $\gamma_D$ in zwei kommutierende $*$-Automorphismen:

$$\gamma_D = \gamma_0 \circ \gamma_{D_0} \quad \text{mit } \gamma_0((f)) := e^{i2\pi\widetilde{f}(0)D(h)}W(f).$$

$\gamma_0$ erfüllt die Voraussetzungen von Hilfssatz 4.2 und ist demnach unitär in der Vakuumdarstellung implementierbar.

2. $\gamma_{D_0}$ implementieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned} D_0(f) = D(f_0) &= (k, f_0)_h \\ &= (k, f_0)_0 + \sigma(h,k)\sigma(h,f_0) \end{aligned}$$

mit einem $k \in \overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$. Ein solches $k$ existiert nach dem Satz von Riesz im Reellen.

3. Der durch $\sigma(\sigma(h,k)h, \cdot)$ gegebene Automorphismus wird implementiert durch $W_0(-\sigma(h,k)h)$. Und $W_0^\eta(\mathfrak{J}k)$ implementiert den Automorphismus $W(f) \mapsto \eta(2\pi\widetilde{f}(0))e^{i(k,f_0)_0}W_0(f)$ (Satz 3.3):

$$\begin{aligned} & \mathrm{Ad}_{W_0(-\sigma(h,k)h)W_0^\eta(\mathfrak{J}k)}(W_0(f)) \\ = \; & \mathrm{Ad}_{W_0(-\sigma(h,k)h)}(\mathrm{Ad}_{W_0^\eta(\mathfrak{J}k)}(W_0(f))) \\ = \; & \mathrm{Ad}_{W_0(-\sigma(h,k)h)}(\eta(2\pi\widetilde{f}(0))e^{i(k,f_0)_0}W_0(f)) \\ = \; & \eta(2\pi\widetilde{f}(0))e^{i(k,f_0)_0}e^{-i\sigma(-\sigma(h,k)h,f_0)}W_0(f) \\ = \; & \eta(2\pi\widetilde{f}(0))e^{iD_0(f)}W_0(f). \end{aligned}$$

Dadurch ist $\gamma_{D_0}$ bis auf den Homomorphismus $\eta(2\pi\widetilde{f}(0))$ unitär implementiert. Dieser ist selbst wieder unitär implementiert (Hilfssatz 4.2).

Es gibt also einen unitären Operator $U_D \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$, der $\gamma_D$ unitär in der Vakuumdarstellung implementiert.

Q.E.D.

**Folgerung 4.4** *Die Darstellungen $\pi_{F_1}$ und $\pi_{F_2}$ sind genau dann unitär äquivalent, wenn $F_2 - F_1$ $\|\cdot\|_h$-stetig ist.*

BEWEIS: Setze $D := F_2 - F_1$. $\pi_0$ und $\pi_D$ sind genau dann unitär äquivalent, wenn $\pi_{F_1}$ und $\pi_{F_2}$ es sind, denn

$$\begin{aligned} & \mathrm{Ad}_U(W_{F_1}(f)) = W_{F_2}(f) \\ \Leftrightarrow \; & e^{iF_1(f)}\,\mathrm{Ad}_U(W_0(f)) = e^{iF_1(f)}W_D(f) \\ \Leftrightarrow \; & \mathrm{Ad}_U(W_0(f)) = W_D(f) \end{aligned}$$

mit einem unitären $U \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$. Satz 4.1 ergibt die Folgerung. Q.E.D.

# Kapitel 5

# Ladungssektoren von $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$

Untersuchen wir die durch (1.9) gegebenen Automorphismen aus der Einleitung hier ein wenig verallgemeinert. Das sind diejenigen, die uns auch hier geladene Sektoren liefern sollen, $\rho, \tau \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} j^0(0,\mathbf{x}) &\mapsto j^0(0,\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x})\mathbb{1}, \\ j^1(0,\mathbf{x}) &\mapsto j^1(0,\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x})\mathbb{1}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

oder ausgedrückt in den kanonischen Variablen $\phi(\mathbf{x}) = \Phi(0,\mathbf{x})$, $\pi(\mathbf{x}) = \partial_0\Phi(0,\mathbf{x})$, den Feldern zur Zeit $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &\mapsto \phi(\mathbf{x}) + \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{z})d\mathbf{z}\mathbb{1} - \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{z})d\mathbf{z}\mathbb{1}, \\ \pi(\mathbf{x}) &\mapsto \pi(\mathbf{x}) - \tau(\mathbf{x})\mathbb{1}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

(5.2) ist durch (5.1) nur bis auf eine angesichts Hilfsatz 4.2 unwesentliche Konstante bestimmt. Wir haben sie hier so gewählt (Feld antisymmetrisch im Unendlichen), weil sich dann ein einfacher Ausdruck für das zugehörige Funktional im Impulsraum ergibt, denn die Fouriertransformierte (im Sinne von Distributionen) von $\int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{z})d\mathbf{z} - \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{z})d\mathbf{z}$ ist der Hauptwert $\lim_{\epsilon\to 0} \widetilde{\rho}(\mathbf{p})\frac{-i\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2+\epsilon^2}$ von $\frac{\widetilde{\rho}(\mathbf{p})}{i\mathbf{p}}$.

Wir definieren das durch (5.2) vermittelte Funktional $L_{\rho,\tau}$:

$$\begin{aligned} L_{\rho,\tau}(f) := \int \left(\int_{-\infty}^{\mathbf{y}} \rho(\mathbf{z})d\mathbf{z} - \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)\right) \partial_{x_0}\Delta(-x_0, \mathbf{y}-\mathbf{x})f(x)d\mathbf{y}d^2x \\ + \int (-\tau(\mathbf{y}))\Delta(-x_0,\mathbf{y}-\mathbf{x})f(x)d\mathbf{y}d^2x. \end{aligned}$$

Dieses Funktional existiert für $\forall f \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ und respektiert die Äquivalenzrelation $\sim$, denn die wird genau durch den Kern von $\Delta$ vermittelt, so daß hiermit ein Funktional auf $\mathcal{L}$ definiert ist.

Wir legen fest, daß wir die von $L_{\rho,\tau}$ erzeugten kohärenten Automorphismen, Zustände und Darstellungen mit $\omega_{\rho,\tau}$, $\gamma_{\rho,\tau}$ und $\pi_{\rho,\tau}$ bezeichnen wollen.

Betrachten wir $L_{\rho,\tau} = L_{\rho,0} + L_{0,\tau}$ zunächst im Ortsraum. Wir verwenden wieder die Notation aus (2.1) und erweitern sie auf Funktionen $\rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, indem wir supp $\rho$ als $\{0\} \times \text{supp}\,\rho$ in den $\mathbb{R}^2$ einbetten.[i]

[i]Daß dies die richtige Wahl ist, ergibt sich aus dem Beweis von Hilfssatz A.4. $\rho$ und $\tau$ stellen Anfangswerte zur Zeit $x_0 = 0$ dar.

$$
\begin{aligned}
L_{\rho,0}(f) &= \int \left(\int_{-\infty}^{\mathbf{y}} \rho(\mathbf{z})d\mathbf{z}\right)\frac{1}{2}(\delta(\mathbf{y}-(\mathbf{x}+x_0))+\delta(\mathbf{y}-(\mathbf{x}-x_0)))f(x)d\mathbf{y}d^2x \\
&\quad -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)2\pi\widetilde{f}(0) \\
&= \int\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\mathbf{x}+x_0}\rho(\mathbf{z})d\mathbf{z}+\int_{-\infty}^{\mathbf{x}-x_0}\rho(\mathbf{z})d\mathbf{z}\right)f(x)d^2x-\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)2\pi\widetilde{f}(0)
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Betrachtet man die Integrale in den Lichtkegelkoordinaten $x_\pm = x_0 \pm \mathbf{x}$, dann sieht man, daß gilt:

$$
L_{\rho,0}(f) = \sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)2\pi\widetilde{f}(0)\begin{cases} -\frac{1}{2} & f \prec \rho \\ 0 & f \curlyvee \rho \vee f \curlywedge \rho\, . \\ \frac{1}{2} & f \succ \rho \end{cases}
\tag{5.4}
$$

$L_{0,\tau}$ hat wegen der Trägereigenschaften von $\Delta$ bis aufs Vorzeichen die gleichen Eigenschaften wie $\sigma(g,\cdot), g \in \mathcal{L}$ (siehe (2.2)):

$$
\begin{aligned}
L_{0,\tau}(f) &= \int \tau(\mathbf{y})\frac{1}{2}(\Theta(\mathbf{y}-(\mathbf{x}+x_0))-\Theta(\mathbf{y}-(\mathbf{x}-x_0)))f(x)d^2x \\
&= \int\frac{1}{2}\left(-\int_{-\infty}^{\mathbf{x}+x_0}\tau(\mathbf{z})d\mathbf{z}+\int_{-\infty}^{\mathbf{x}-x_0}\tau(\mathbf{z})d\mathbf{z}\right)f(x)d^2x
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

und

$$
L_{0,\tau}(f) = \sqrt{2\pi}\widetilde{\tau}(0)2\pi\widetilde{f}(0)\begin{cases} 0 & f \prec \tau \ \vee f \succ \tau \\ -\frac{1}{2} & f \curlywedge \tau \\ \frac{1}{2} & f \curlyvee \tau \end{cases}\, .
\tag{5.6}
$$

$L_{0,\tau}$ ist $\|\cdot\|_h$-stetig: Es gilt $L_{0,\tau}(f) = -\sigma(\frac{\tau}{\sqrt{2\pi}}, f)$, denn $\tau \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ liegt auch in $\overline{\mathcal{L}}^{\sigma}$ (Hilfssatz A.4).

Wie interpretieren wir dieses geometrische Verhalten? Offenbar erzeugt $L_{0,\tau}$ eine linkslaufende Ladung $q = -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\widetilde{\tau}(0)$ und eine rechtslaufende mit $q = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\widetilde{\tau}(0)$. Dies stellt man durch entsprechende bilokalisierte Feldstärkemessungen fest, etwa wie in dem Beweis von Satz 2.6. Aber es erzeugt keine Gesamtladung: Wir befinden uns im Vakuumsektor, denn $L_{0,\tau}$ ist $\|\cdot\|_h$-stetig.

Dagegen erzeugt $L_{\rho,0}$ je eine links- und rechtslaufende Ladung $q = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)$ auf den entsprechenden Lichtstrahlen. Also erzeugt es eine Gesamtladung. Somit sollten wir nicht mehr im Vakuumsektor sein; das beweisen wir gleich mit Satz 5.1.

Zunächst wollen wir noch $L_{\rho,\tau}$ im Impulsraum darstellen. Dazu benutzen wir in einem Zwischenschritt die räumlich Fouriertransformierte von $\Delta(x_0,\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}})\frac{\sin(|\mathbf{p}|x_0)}{|\mathbf{p}|}e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}d\mathbf{p}$. Eine direkte Rechnung ergibt dann als Hauptwertintegrale:

$$
\begin{aligned}
L_{\rho,\tau}(f) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\overline{\left(\frac{\widetilde{\rho}(\mathbf{p})}{i\mathbf{p}}\right)}(\delta(p_0+\mathbf{p})+\delta(p_0-\mathbf{p}))\widetilde{f}(p_0,\mathbf{p})d^2p \\
&\quad -\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\overline{\frac{-\widetilde{\tau}(\mathbf{p})}{\mathbf{p}}}(\delta(p_0+\mathbf{p})-\delta(p_0-\mathbf{p}))\widetilde{f}(p_0,\mathbf{p})d^2p \\
&= \sqrt{2\pi}\int\overline{\left(\frac{\widetilde{\rho}(\mathbf{p})}{i\mathbf{p}}\right)}\frac{\widetilde{f}(\mathbf{p},\mathbf{p})+\widetilde{f}(-\mathbf{p},\mathbf{p})}{2}d\mathbf{p} \\
&\quad -\sqrt{2\pi}\int\overline{\frac{-\widetilde{\tau}(\mathbf{p})}{\mathbf{p}}}\frac{\widetilde{f}(-\mathbf{p},\mathbf{p})-\widetilde{f}(\mathbf{p},\mathbf{p})}{2i}d\mathbf{p}.
\end{aligned}
$$

Mit $\widetilde{f}(\mathbf{p},\mathbf{p})+\widetilde{f}(-\mathbf{p},\mathbf{p}) = \widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})+\widetilde{f}(-|\mathbf{p}|,\mathbf{p})$ und $\widetilde{f}(-\mathbf{p},\mathbf{p})-\widetilde{f}(\mathbf{p},\mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{p})\left(\widetilde{f}(-|\mathbf{p}|,\mathbf{p}) - \widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})\right)$ bekommt man:

$$
\begin{aligned}
L_{\rho,\tau}(f) &= \sqrt{2\pi}\int \overline{\left(\frac{\widetilde{\rho(\mathbf{p})}}{i\mathbf{p}}\right)}\frac{\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})+\widetilde{f}(-|\mathbf{p}|,\mathbf{p})}{2}d\mathbf{p}\\
&+\sqrt{2\pi}\int\frac{\overline{\widetilde{\tau}(\mathbf{p})}}{\mathbf{p}}\epsilon(\mathbf{p})\frac{\widetilde{f}(-|\mathbf{p}|,\mathbf{p})-\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})}{2i}d\mathbf{p}
\end{aligned}
$$

und weiter im Sinne von Hauptwertintegralen mit Substitution $\mathbf{p}\mapsto -\mathbf{p}$ in jeweils einem der Summanden im Integranden unter Ausnutzung, daß $\operatorname{Re}\widetilde{\rho}, \operatorname{Re}\widetilde{f}$ gerade und $\operatorname{Im}\widetilde{\rho}, \operatorname{Im}\widetilde{f}$ ungerade sind:

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2\pi}\operatorname{Re}\int\overline{\left(\frac{\widetilde{\rho}(\mathbf{p})}{i\mathbf{p}}\right)}\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})d\mathbf{p} - \sqrt{2\pi}\operatorname{Im}\int\frac{\overline{\widetilde{\tau}(\mathbf{p})}}{|\mathbf{p}|}\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})d\mathbf{p}\\
&= -2\sqrt{2\pi}\operatorname{Im}\int\overline{\widetilde{\rho}(\mathbf{p})}\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{2\mathbf{p}} - 2\sqrt{2\pi}\operatorname{Im}\int\overline{\widetilde{\tau}(\mathbf{p})}\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}.
\end{aligned}
$$

Diesen Ausdrücken sieht man nochmals explizit an, daß sie für $\forall f\in\mathcal{L}$ existieren, denn $\operatorname{Im}\overline{\widetilde{\rho}}\widetilde{f}$ hat bei Null eine Nullstelle mindestens erster Ordnung, und die Einschränkung auf den Rand des Vorwärtslichtkegels bestätigt, daß dieses Funktional die Äquivalenzrelation $\sim$ respektiert.

Die zu $L_{\rho,0}$ gehörenden Automorphismen $\gamma_{\rho,0}$ der Weylalgebra sind in gewisser Hinsicht im kausalen Abschluß von $\{0\}\times\operatorname{supp}\rho$ lokalisiert: Wählen wir ein $f\in\mathcal{L}$ so, daß gilt $f\succ\rho$ oder $f\prec\rho$ (wohlgemerkt: $f$ ist entweder rechts *oder* links, nicht aber rechts *und* links von $\rho$ lokalisiert), dann ist

$$
\begin{aligned}
\omega_{L_{\rho,0}}(W(f)) &= e^{iL_{\rho,0}(f)}\omega_0(W(f)) = e^{\pm\frac{i}{2}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)2\pi\widetilde{f}(0)}\omega_0(W(f))\\
&= \begin{cases}\omega_0(W(f)) & \widetilde{f}(0)=0\\ 0 & \widetilde{f}(0)\neq 0\end{cases} = \omega_0(W(f)).
\end{aligned}
$$

D.h. sowohl im linken als auch im rechten raumartigen Komplement von $\operatorname{supp}\rho$ herrscht Vakuum. Die durch $L_{\rho,0}, \sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)\neq 0$ vorgegebene kinkenartige Feldkonfiguration wirkt sich als lokale Anregung aus. Durch bilokalisierte Messungen kann man aber die Ladung $\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)$ auch außerhalb im räumlichen Komplement von $\{0\}\times\operatorname{supp}\rho$ als Feldstärkedifferenz messen. Das benutzen wir zum Beweis des nächsten Satzes.

**Satz 5.1** *$L_{\rho,0}$ ist unstetig in $\|\cdot\|_h$ für $\forall\rho\in\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ mit $\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)\neq 0$.*

Dieser Beweis läuft ganz analog zu dem von Satz 2.6, wir wählen nur eine andere Folge. Wir vermuten, daß $L_{\rho,0}$ auf einen bzgl. $j^0$ geladenen Sektor führt. Kraft des Gaußschen Satzes kann man die Ladung durch Feldstärkemessungen sehr weit links und rechts vom Ursprung entfernt nachweisen.
BEWEIS: Betrachten wir die Folge

$$
\begin{aligned}
f_n(x_0,\mathbf{x}) &:= \frac{1}{n^2}g\left(\frac{x_0}{n},\frac{\mathbf{x}-2nr}{n}\right) - \frac{1}{n^2}g\left(\frac{x_0}{n},\frac{\mathbf{x}+2nr}{n}\right),\\
\widetilde{f_n}(p_0,\mathbf{p}) &= e^{-i\mathbf{p}2nr}\widetilde{g}(np_0,n\mathbf{p}) - e^{i\mathbf{p}2nr}\widetilde{g}(np_0,n\mathbf{p}) = -2i\sin(2\mathbf{p}nr)\widetilde{g}(np_0,n\mathbf{p})
\end{aligned}
$$

wobei $\widetilde{g}\in\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}_0$ und $r>0$ so, daß sowohl $\operatorname{supp}h, \operatorname{supp}g\in\mathcal{O}([-r,r])$ als auch $\operatorname{supp}\rho\in[-r,r]$. Die Funktion $\frac{1}{n^2}g(\frac{x_0}{n},\frac{\mathbf{x}}{n}\mp 2r)$ hat Träger in $\mathcal{O}([nr,3nr])$ bzw. $\mathcal{O}([-3nr,-nr])$, liegt also rechts bzw. links von $\operatorname{supp}h$ und $\operatorname{supp}\rho$. Damit gilt:

1.
$$L_{\rho,0}(f_n) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)2\pi\widetilde{g}(0) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)\right)2\pi\widetilde{g}(0) = \sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)2\pi\widetilde{g}(0)$$
aufgrund der Trägereigenschaften von $f_n$ und Gl. (5.4).

2. $\sigma(h, f_n) = 0,\ h \in \mathcal{L}$, wieder aufgrund der Trägereigenschaften.

3.
$$\begin{aligned} \|f_n\|_0^2 &= 4\pi \int |\widetilde{f_n}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= 8\pi \int \frac{|\sin(2\mathbf{p}nr)|^2 |\widetilde{g}(|n\mathbf{p}|, n\mathbf{p})|^2}{|\mathbf{p}|} d\mathbf{p} = \not{c} \end{aligned}$$
mit Substitution $\mathbf{p} \mapsto \frac{\mathbf{p}}{n}$. $f_n$ geht nicht $\|\cdot\|_h$-stark gegen Null. Die Folge ist aber $\|\cdot\|_h$-beschränkt.

4. $f_n$ geht $\|\cdot\|_h$-schwach gegen Null auf $\overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$. Wegen der Beschränktheit von $\{f_n\}$ in $\|\cdot\|_h$ reicht es, dies für $\forall k \in \mathcal{L}_0$ zu zeigen:
$$\begin{aligned} (k, f_n)_h &= (k, f_n)_0 + \sigma(h, k)\underbrace{\sigma(h, f_n)}_{=0} \\ &= 4\pi\,\mathrm{Re} \int \overline{\widetilde{k}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})}(-2i)\sin(2\mathbf{p}nr)\widetilde{g}(n|\mathbf{p}|, n\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= 8\pi\,\mathrm{Im} \int \overline{\widetilde{k}\left(\frac{|\mathbf{p}|}{n}, \frac{\mathbf{p}}{n}\right)} \sin(2\mathbf{p}r)\widetilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \to 0, \end{aligned}$$
denn $\widetilde{k}(0) = 0$, und der Integrand ist durch $\not{c}|\sin(2\mathbf{p}r)\widetilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})|\ \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}$-integrabel beschränkt.

Also ist $L_{\rho,0}$ nicht $\|\cdot\|_h$-schwach-stetig, damit auch nicht $\|\cdot\|_h$-stark-stetig [16, Kap. 2.3, Cor. 1]. Q.E.D.

Wir erwähnen noch, daß $L_{\rho,0}$ mit $\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0) = 0$ $\|\cdot\|_h$-stetig ist. Denn die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung liefert
$$\begin{aligned} |L_{\rho,0}(f)| &= 2\sqrt{2\pi}|\mathrm{Im} \int \overline{\widetilde{\rho}(\mathbf{p})}\widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}| \\ &\leq 2\left(\int |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}\|f\|_0 \leq \not{c}\|f\|_h. \end{aligned}$$

In der konvexen Hülle von $\{f_n\}$ können wir eine neue Folge $\bar{f}_n$ finden, die $\|\cdot\|_h$-(stark)-stetig gegen Null geht. (Die starken und schwachen Abschlüsse konvexer Mengen sind gleich, siehe [16, Kap. 2.3, Cor. 2].) Wählen wir $2\pi\widetilde{g}(0) = 1$, dann konvergiert der Operator $W(\bar{f}_n)$ in jeder Darstellung $\pi_{\rho,\tau}$ in der stark-$*$-Operator-Topologie gegen den (exponenzierten) Ladungsoperator $e^{iQ}$ $(= e^{i\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0)}\mathbb{1})$.

**Folgerung 5.2** *Insgesamt ergibt sich:*

1. *Genau die $L_\rho$, $\rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ mit $q = \sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0) \neq 0$, führen via $L_{\rho,0}$ aus dem Vakuumsektor heraus, denn nur dann ist $L_{\rho,0}$ nicht stetig in $\|\cdot\|_h$.*

2. *$L_{\rho_1}, L_{\rho_2}$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, führen genau dann in den gleichen Sektor, wenn $\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho_1}(0) = \sqrt{2\pi}\widetilde{\rho_2}(0)$ gilt, denn in dem Falle ist das Differenz-Funktional $L_{\rho_1-\rho_2}$ $\|\cdot\|_h$-stetig.*

3. *Wir können also den Sektoren (d.h. hier den Äquivalenzklassen der durch $\omega_{\rho,0}$ erzeugten Darstellungen) eine Ladung $q = \sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0) \in \mathbb{R}$ zuordnen.*

# Kapitel 6

# Unitäre Implementierung der Translationen

Wir vereinbaren folgende Notationen:

- $\bar{p} := (|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$,
- wir setzen für $f \in \mathcal{L}, y \in \mathbb{R}^2$: $f_y(x) := f(x-y)$,
- für $\rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$: $\widetilde{\rho_x}(\mathbf{p}) := e^{i\bar{p}x}\widetilde{\rho}(\mathbf{p})$[i], und ebenso für allgemeinere $f \in \overline{\mathcal{L}}^{\sigma}$. Damit ist $L_{\rho,0}(f_x) = L_{\rho_{-x},0}(f)$.

Die Translationsgruppe $(\mathbb{R}^2, +)$ agiert auf $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$ als eine Gruppe von $*$-Automorphismen $\alpha_x$ gegeben durch

$$\alpha_x(W(f)) = W(f_x), \quad \forall f \in \mathcal{L}.$$

Wir wollen der Fragestellung nachgehen, ob sich die Translationsgruppe im Vakuumzustand und den Zuständen $\omega_{\rho,0}$ durch eine stark-stetige Gruppe unitärer Operatoren $U(x)$, die die Spektrumsbedingung (siehe Def. 6.12) erfüllt, implementieren läßt. Dazu orientieren wir uns an [23].

## 6.1 Die Translationen auf $\mathcal{L}$

Daß wir in diesem Abschnitt so detailliert auf die Translationen auf $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_0$ eingehen, hat den Grund, daß die Translationen $\|\cdot\|_h$ nicht invariant lassen, sie also keine $\|\cdot\|_h$-unitäre Operatoren auf $\mathcal{L}_0$ definieren. Die erste Aussage des folgenden Hilfssatzes sagt uns, daß wir uns bei diesen Betrachtungen im wesentlichen auf $\mathcal{L}_0$ beschränken können.

**Hilfssatz 6.1** *Es gilt für* $\forall f, g \in \mathcal{L}$:

1. $\widetilde{f_x}(0) = \widetilde{f}(0)$, *insbesondere läßt die Abbildung* $f \mapsto f_x$ *den Raum* $\mathcal{L}_0$ *invariant,*
2. $(g_{-x}, f)_0 = (g, f_x)_0$ *und* $\|f_x\|_0 = \|f\|_0$, *falls* $f, g \in \mathcal{L}_0$,
3. $\sigma(g_{-x}, f) = \sigma(g, f_x)$ *und* $\sigma(g_x, f_x) = \sigma(g, f)$,
4. $\|f_x - f\|_0 \to 0$ *für* $x \to 0$,
5. $\sigma(h, f_x - f) \to 0$ *für* $x \to 0$,
6. $\sigma(h, f_x) \leq (1 + C_h|x|)\|f\|_h, C_h > 0$, *falls* $f \in \mathcal{L}_0$.

[i]Daß dieses die richtige Setzung ist, sieht man am Gang des Beweises von Hilfssatz A.4.

BEWEIS:

1. folgt aus $\widetilde{f_x}(p) = e^{ipx}\widetilde{f}(p)$.
2. siehe 3.
3. $$\begin{aligned}\sigma(g_{-x}, f) &= 4\pi \operatorname{Im} \int \left(\overline{\widetilde{g_{-x}}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})}\widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})\right) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= 4\pi \operatorname{Im} \int \left(\overline{e^{-i\bar{p}x}\widetilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})}\widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})\right) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= 4\pi \operatorname{Im} \int \left(\overline{\widetilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})}e^{i\bar{p}x}\widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})\right) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= 4\pi \operatorname{Im} \int \left(\overline{\widetilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})}\widetilde{f}_x(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})\right) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= \sigma(g, f_x)\end{aligned}$$
   und analog für die anderen angeführten Gleichungen.
4. Wegen 1 ist $f_x - f \in \mathcal{L}_0$. Es gilt:
   $$\begin{aligned}\|f_x - f\|_0^2 &= 4\pi \int |e^{i\bar{p}x} - 1|^2 |\widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &\leq 4\pi \int |\bar{p}x|^2 |\widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \leq 4\pi|x|^2 \int |\bar{p}|^2 |\widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}.\end{aligned}$$
   Das Integral existiert, da $f$ eine Testfunktion ist und $|\bar{p}| = \sqrt{2}|\mathbf{p}|$, d.h. es gilt:
   $$\|f_x - f\|_0 \leq C_f|x|, \quad C_f > 0.$$
5. $$\begin{aligned}|\sigma(h, f_x - f)| &= 4\pi|\operatorname{Im} \int \overline{\widetilde{h}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})} \left(e^{i\bar{p}x} - 1\right) \widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}| \\ &\leq 4\pi\sqrt{2\pi}|x| \int |\overline{\widetilde{h}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})}|\bar{p}|\widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})| \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} = 4\pi|x|C_{h,f}\end{aligned}$$
6. Mit 4 folgt:
   $$\begin{aligned}|\sigma(h, f_x)| &= |\sigma(h, f) - \sigma(h_{-x} - h, f)| \\ &\leq \|f\|_h + C_h\|h_x - h\|_0\|f\|_h \leq (1 + C_h|x|)\|f\|_h\end{aligned}$$

Q.E.D.

**Folgerung 6.2** *Es gilt:*

1. $\|f_x\|_h \leq C_{h,K}\|f\|_h$ *für* $\forall f \in \mathcal{L}_0, x \in K, \forall K \subset \mathbb{R}^2$ *kompakt.*
2. $\|f_x - f\|_h \to 0, \forall f \in \mathcal{L}$ *für* $x \to 0$

BEWEIS:

1. Es gilt nach Hilfssatz 6.1, Punkte 2, 6:
   $$\begin{aligned}\|f_x\|_h^2 &= \|f_x\|_0^2 + \sigma(h, f_x)^2 \\ &\leq \|f\|_0^2 + (1 + C_h|x|)^2\|f\|_h^2 \\ &\leq (2 + C_h|x|)^2\|f\|_h^2\end{aligned} \tag{6.1}$$
   Da $x \mapsto |x|$ auf jedem Kompaktum beschränkt ist, folgt die Aussage.
2. Kombination von Hilfssatz 6.1, Punkte 4 und 5.

Q.E.D.

**Folgerung 6.3**

1. *Für festes $x$ sind die durch $V(x) : f \mapsto f_x$ auf $\mathcal{L}_0$ gegebenen linearen $\|\cdot\|_h$-beschränkten Operatoren wohldefiniert. Aber $V(x)$ ist* nicht *isometrisch. Der $\|\cdot\|_h$-Abschluß von $V(x)$ wird wieder mit $V(x)$ bezeichnet.*

2. *Die Menge der Operatoren $V(x), x \in \mathbb{R}^2$ bildet eine stark-stetige Darstellung der Translationsgruppe auf $\overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$, insbesondere gilt $V(x)^{-1} = V(-x)$.*

3. *Auf ganz $\overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$ hat $V(x)$ die gleiche Operationsvorschrift $V(x)f = f_x$.*

BEWEIS: Mit den Aussagen aus 6.2 gilt:

- Für festes $x$ ist $V(x)$ wohldefiniert, $\|\cdot\|_h$-beschränkt. D.h. wir können $V(x)$ bzgl. $\|\cdot\|_h$ abschließen. $V(x)$ ist nicht isometrisch, da $\|\cdot\|_h$ unter $V(x)$ nicht invariant ist.

- Für jedes feste $f \in \mathcal{L}_0$ ist $x \mapsto V(x)f$ $\|\cdot\|_h$-stetig.

- Sei $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_h} f$, dann konvergiert $V(x)f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_h} V(x)f$ lokal gleichmäßig in $x$, da $V(x)$ lokal gleichmäßig in $x$ $\|\cdot\|_h$-beschränkt ist. Also ist $V(x)f$ wieder $\|\cdot\|_h$-stetig in $x$, $f \in \overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$.

Die Gruppeneigenschaften von $V(x)$ sind offensichtlich. Die Aussage über die Operationsvorschrift ergibt sich aus der Beschränktheit von $V(x)$ zu festem $x$. Q.E.D.

Damit ist klar, daß alle in Hilfssatz 6.1 gemachten Aussagen auch für $f, g \in \overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$ zutreffen.

## 6.2 Die Translationen in der Vakuumdarstellung

$\omega_0$ ist invariant unter $\alpha_x, \forall x \in \mathbb{R}^2$, denn es gilt $\forall f \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\omega_0 \circ \alpha_x(W(f)) = \omega_0(W(f_x)) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}\|f_x\|_0^2} & f \in \mathcal{L}_0 \\ 0 & f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}\|f\|_0^2} & f \in \mathcal{L}_0 \\ 0 & f \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0 \end{cases} = \omega_0(W(f)),\end{aligned} \tag{6.2}$$

weil $\|\cdot\|_0$ unter $f \mapsto f_x$ (Hilfssatz 6.1) invariant ist. D.h. $\alpha_x$ ist auf jeden Fall unitär implementierbar nach Standardsätzen (z.B. [17, S. 132]). In der Tat ist Invarianz unter den Translationen eine charakterisierende Eigenschaft des Vakuums. Wir sehen hierbei auch, daß es keine Rolle spielt, daß die Translationen $\|\cdot\|_h$ nicht invariant lassen. Wichtig ist die Invarianz von $\|\cdot\|_0$.

Wir definieren eine Familie von Operatoren $U_0(x) : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0, x \in \mathbb{R}^2$ durch

$$U_0(x)W_0(f)\Omega := W_0(f_x)\Omega, f \in \mathcal{L}$$

und lineare Fortsetzung und Abschluß auf ganz $\mathcal{H}_0$. Dabei gilt $U_0(x)\Omega = \Omega$, das Hilbertraumäquivalent von (6.2).

**Satz 6.4**

1. *$U_0(x)$ ist ein wohldefinierter unitärer Operator auf $\mathcal{H}_0$,*

2. *als Funktion von $x$ stark-stetig auf $\mathcal{H}_0$, und*

3. *darüberhinaus stellen die Operatoren $U_0(x)$ die Translationen auf $\mathcal{H}_0$ dar.*

*Zusammengefaßt: Die $U_0(x)$ sind eine stark-stetige unitäre Darstellung der Translationen auf $\mathcal{H}_0$.*

Beweis:

1. Wegen der Invarianz von $\omega_0$ und $\sigma(\cdot,\cdot)$ unter den Translationen gilt

$$\begin{aligned}\langle W_0(g_x)\Omega, W_0(f_x)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} &= e^{i\sigma(g_x,f_x)}\omega_0(W(f_x-g_x)) \\ &= e^{i\sigma(g,f)}\omega_0(W(f-g)) = \langle W(g)\Omega, W(f)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}.\end{aligned}$$

   $U_0(x)$ ist also ein isometrischer Operator auf der totalen Menge $\{W(f)\Omega,\ f \in \mathcal{L}\}$ (damit automatisch wohldefiniert). $U_0(x)$ hat ein ebenfalls dicht definiertes Inverses, $U_0(-x)$ und läßt sich deshalb zu einem auf ganz $\mathcal{H}_0$ definierten unitären Operator abschließen.

2. Es reicht, die starken Stetigkeit auf der totalen Menge $\{W_0(f)\Omega,\ f \in \mathcal{L}\}$ zu zeigen, da $U_0(x), \forall x \in \mathbb{R}^2$ unitär, also gleichmäßig in $x$ beschränkt sind. Es gilt für $\forall f \in \mathcal{L}$:

$$\|(U_0(x) - \mathbb{1})W_0(f)\Omega\|_{\mathcal{H}_0} = \|(W_0(f_x) - W_0(f))\Omega\|_{\mathcal{H}_0}.$$

   $\|(U_0(x) - \mathbb{1})W_0(f)\|_{\mathcal{H}_0} \to 0$ ist äquivalent zu $\|f_x - f\|_h \to 0, \quad x \to 0$. Dies ist der Fall nach Folgerung 6.2.

3. Man rechnet nach:

$$\begin{aligned}U_0(y)U_0(x)W_0(f)\Omega &= U_0(y)W_0(f_x)\Omega \\ &= W_0(f_{x+y})\Omega = U_0(x+y)W_0(f)\Omega, \quad \forall f \in \mathcal{L},\end{aligned}$$

   d.h. $U_0(x)U_0(y) = U_0(x+y)$ als Operatoridentität auf ganz $\mathcal{H}_0$.

Q.E.D.

**Folgerung 6.5**

- $U_0(x)W_0(f)\Omega = W_0(f_x)\Omega, \forall f \in \overline{\mathcal{L}}^{\sigma}$.
- *In der Vakuumdarstellung $\pi_0$ implementieren die Operatoren $U(x)$ die $*$-Automorphismen $\alpha_x$, d.h. es gilt für $\forall f \in \overline{\mathcal{L}}^{\sigma}$:*

$$U_0(x)W_0(f)U_0(-x) = W_0(f_x) = \pi_0(\alpha_x(W(f))) \tag{6.3}$$

Beweis: Die Operationsvorschrift bleibt auf $\overline{\mathcal{L}}^{\sigma}$ erhalten, denn $U_0(x)$ ist unitär, umso mehr beschränkt. Die zweite Aussage bekommt man durch Nachrechnen unter Anwendung der ersten. Q.E.D.

## 6.3 Die Translationen in den Darstellungen $\pi_\rho$

Später, in Folgerung 6.14 und Satz 7.2, wird es wichtig sein, Summen von Funktionalen $L_{\rho_0,0} + \sigma(f,\cdot)$ zu betrachten. Die Integralausdrücke dieser beider Funktionalklassen im Impulsraum sind sehr ähnlich, wie auch der von $L_{0,\tau}$.

Läßt man $\rho$ aus der Menge

$$\{\rho \mid \widetilde{\rho}(\mathbf{p}) = \widetilde{\rho}_0(\mathbf{p}) + \mathrm{sgn}(\mathbf{p})\widetilde{\phantom{x}}_{\tau(\mathbf{p})} - \sqrt{2\pi}\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p}), \rho_0, \tau \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), f \in \mathcal{L}\} \tag{6.4}$$

zu, werden die Funktionale $\sigma(f,\cdot)$ und $L_{\rho_0,\tau}$ zu $L_{\rho,0}$ vereint. Die Funktionen $\widetilde{\rho}(\mathbf{p})$ haben jetzt i.a. eine Unstetigkeit bei Null. Die bereitet aber keine Schwierigkeiten, da es in den folgenden Beweisen nur auf den starken Abfall von $\widetilde{\rho}(\mathbf{p})$ mit wachsendem $\mathbf{p}$ und den Betrag in der Nähe der Null ankommt. Wir schreiben kurz $L_\rho$ statt $L_{\rho,0}$ und ebenso $\omega_\rho$, $\gamma_\rho$ und $\pi_\rho$ etc.

$\rho$ aus der obigen Menge ordnen wir die Funktionen

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}_+(\mathbf{p}) &:= \widetilde{\rho}_0(\mathbf{p}) - \sqrt{2\pi}\widetilde{f}(\mathbf{p},\mathbf{p}) + \widetilde{\tau}(\mathbf{p}) \\ \widetilde{\rho}_-(\mathbf{p}) &:= \widetilde{\rho}_0(\mathbf{p}) + \sqrt{2\pi}\widetilde{f}(-\mathbf{p},\mathbf{p}) - \widetilde{\tau}(\mathbf{p})\end{aligned} \tag{6.5}$$

aus $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ zu. Sie stimmen für positives resp. negatives Argument $\mathbf{p}$ mit $\rho$ überein.

Als erstes müssen wir uns eine Aussage darüber verschaffen, ob $\omega_\rho$ und $\omega_\rho \circ \alpha_x$ überhaupt im gleichen Sektor liegen (d.h. ob $\pi_\rho$ und $\pi_\rho \circ \alpha_x$ unitär äquivalent sind). Das erledigen die sich anschließenden drei Aussagen.

**Hilfssatz 6.6** *Für $L_\rho$ gilt:*

1. *Für $\forall x \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $\xi(x) \in \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ mit $\widetilde{\xi(x)}(\mathbf{p}) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})(e^{-i\bar{p}x} - 1)\widetilde{\rho}(\mathbf{p})$ so, daß $L_\rho(f_x - f) = L_{\rho_{-x}-\rho}(f) = -\sigma(\xi(x), f)$, und damit ist $L_{\rho_{-x}-\rho}$ für jedes feste $x$ ein $\|\cdot\|_h$-stetiges Funktional auf $\mathcal{L}$.*

2. *$\xi(x+y) = V(-y)\xi(x) + \xi(y)$, insb. $\xi(0) = 0$ und $V(x)\xi(x) = -\xi(-x)$.*

3. *$\xi(x)$ ist stetig in $\|\cdot\|_h$.*

Beweis:

1. Der Beweis, daß $\xi(x) \in \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$, definiert wie oben, für jedes $x \in \mathbb{R}^2$, ist sehr technisch, deshalb findet man ihn in Hilfssatz A.6.

2. Mit dieser Definition von $\xi$ als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ gilt

$$\xi(x+y) = V(-y)\xi(x) + \xi(y). \tag{6.6}$$

   $\xi(0) = 0$ folgt aus der Definition und $V(x)\xi(x) = -\xi(-x)$ aus der Funktionalgleichung für $y = -x$.

3. Noch zu zeigen ist, daß die Funktion $\xi : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ $\|\cdot\|_h$-stetig ist. Wegen der Funktionalgleichung und der starken Stetigkeit von $V(x)$ reicht es, die Stetigkeit bei $x = 0$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}\|\xi(x)\|_0^2 &= 2\int |e^{-i\bar{p}x} - 1|^2 |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &\le 2|x|^2 \int |\bar{p}|^2 |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}\end{aligned}$$

   und

$$\begin{aligned}|\sigma(h,\xi(x))| &= \left| 2\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Im}\int \overline{\widetilde{h}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})(e^{-i\bar{p}x} - 1)\widetilde{\rho}(\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}\right| \\ &\le 2\sqrt{2\pi}|x| \int |\overline{\widetilde{h}(\bar{p})}\widetilde{\rho}(\mathbf{p})||\bar{p}| \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}.\end{aligned}$$

   Die Integrale existieren, da $\rho$ schnell abfällt und $|\bar{p}| = \sqrt{2}|\mathbf{p}|$. Mithin gehen die Ausdrücke mit $x$ gegen Null.

4. Es gilt

$$\begin{aligned}
L_\rho(f_x - f) &= L_{\rho_{-x}-\rho}(f) \\
&= -2\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Im}\int \overline{\mathrm{sgn}(\mathbf{p})(e^{-i\bar{p}x}-1)\widetilde{\rho}(\mathbf{p})}\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\
&= -\sigma(\xi(x), f),
\end{aligned}$$

und der letzte Ausdruck stellt für festes $x$ ein $\|\cdot\|_h$-stetiges Funktional dar. Für festes $f \in \mathcal{L}$ verschwindet er mit $x \to 0$.

Q.E.D.

**Folgerung 6.7** *Der durch $L_{\rho_{-x}-\rho}$ gegebene $*$-Automorphismus wird implementiert durch $W_0(\xi(x))$, und $W_0(\xi(x))$ als Funktion von $x$ ist stark-stetig, denn $\xi(x)$ ist $\|\cdot\|_h$-stetig.*

**Satz 6.8** *In der Darstellung $\pi_\rho$ sind die Automorphismen $\alpha_x$ für jedes $x$ unitär implementierbar durch Operatoren $U_\rho(x)$. Für jeden solchen Operator gilt*

$$U_\rho(x) = \lambda(x)U_0(x)W_0(\xi(x))$$

*mit einer zunächst beliebigen Funktion $\lambda$ mit $|\lambda(x)| = 1, \forall x$.*

BEWEIS: Es gilt für $\forall f \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\pi_\rho(\alpha_x(W(f))) = \pi_\rho(W(f_x)) &= e^{iL_{\rho_{-x}}(f)}W_0(f_x) \\
&= e^{iL_{\rho_{-x}}(f)-iL_\rho(f)}e^{iL_\rho(f)}U_0(x)W_0(f)U_0^*(x) \\
&= U_0(x)W_0(\xi(x))\pi_\rho(W(f))W_0^*(\xi(x))U_0^*(x).
\end{aligned}$$

Also implementiert $U_0(x)W_0(\xi(x))$ den Automorphismus $\alpha_x$ unitär. Gibt es einen zweiten solchen unitären Operator, unterscheidet er sich vom diesem höchstens um eine Phase $\lambda(x)$, denn $\pi_0(W(\mathcal{L}))$ operiert irreduzibel auf $\mathcal{H}_0$ (Schurs Lemma). Q.E.D.

Zunächst bilden die $U_\rho(x)$ noch keine Darstellung der Translationsgruppe, denn es gilt zunächst mit Hilfssatz 6.6, Punkt 2, nur

$$\begin{aligned}
U_\rho(x)U_\rho(y) &= \lambda(x)U_0(x)W_0(\xi(x))\lambda(y)U_0(y)W_0(\xi(y)) \\
&= \lambda(x)\lambda(y)U_0(x)U_0(y)e^{-\frac{i}{2}\sigma(V(-y)\xi(x),\xi(y))}W_0(V(-y)\xi(x)+\xi(y)) \\
&= e^{-\frac{i}{2}\sigma(V(-y)\xi(x),\xi(y))}\lambda(x)\lambda(y)U_0(x+y)W_0(\xi(x+y)) \\
&= e^{-\frac{i}{2}\sigma(\xi(x),V(y)\xi(y))}\frac{\lambda(x)\lambda(y)}{\lambda(x+y)}U_\rho(x+y) \\
&= e^{\frac{i}{2}\sigma(\xi(x),\xi(-y))}\frac{\lambda(x)\lambda(y)}{\lambda(x+y)}U_\rho(x+y).
\end{aligned}$$

Bei willkürlicher Wahl von $\lambda(x)$ bekommen wir nur eine Strahldarstellung der Translationsgruppe. Um eine (gewöhnliche) Darstellung der Translationsgruppe im Zustand $\omega_\rho$ zu bekommen, müssen wir ein $\lambda(x)$ finden, das die Gleichung

$$e^{\frac{i}{2}\sigma(\xi(x),\xi(-y))}\frac{\lambda(x)\lambda(y)}{\lambda(x+y)} = 1, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2 \tag{6.7}$$

löst.

Weil wir Energie- und Impulsoperatoren definieren wollen, soll angesichts des Satzes von Stone die Darstellung stark-stetig sein. $\lambda(x)U_0(x)W_0(\xi(x))$ ist genau dann stark-stetig als Funktion von $x$, wenn $\lambda(x)$ stetig ist, denn $U_0(x)$ und $W_0(\xi(x))$ sind beide stark-stetig. Deshalb suchen wir nur solche stetigen Funktionen $\lambda$.

**Hilfssatz 6.9** *Die Gleichung*

$$\zeta(x+y) - \zeta(x) - \zeta(y) = \frac{1}{2}\sigma(\xi(x), \xi(-y)) \tag{6.8}$$

*wird gelöst von*

$$\zeta(x) = \int |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \sin(\bar{p}x) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}.$$

*$\zeta$ ist stetig in $x$, und jede andere stetige Lösung $\zeta'$ der Bedingung* (6.8) *ist von der Form $\zeta'(x) = qx + \zeta(x)$ mit einem beliebigen $q \in \mathbb{R}^2$.*

BEWEIS:

- Zunächst existiert das Integral für $\forall x$, da $\rho$ schnell abfallend ist, und $\sin(\bar{p}x)$ eine Nullstelle bei Null hat. Als Funktion von $x$ ist es stetig, denn der Integrand ist stetig in $x$ und beschränkt durch $|x||\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2$, lokal also unabhängig von $x$ durch $\not{c}|\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2$.

- Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\zeta(x+y) - \zeta(x) - \zeta(y) \\
=&\int |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \left(\sin(\bar{p}(x+y)) - \sin(\bar{p}x) - \sin(\bar{p}y)\right) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\
=&\int |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \left((\cos(\bar{p}x) - 1)\sin(\bar{p}y) + \sin(\bar{p}x)(\cos(\bar{p}y) - 1)\right) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\
=&\int |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \operatorname{Im}\left((e^{i\bar{p}x} - 1)(e^{i\bar{p}y} - 1)\right) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\
=&\frac{1}{2}\sigma(\xi(x), \xi(-y)).
\end{aligned}$$

- Sei $\zeta'$ eine andere *stetige* Lösung[ii] von (6.8), d.h. die Differenz eine stetige Lösung der homogenen Gleichung, dann muß diese eine lineare Funktion $qx$ sein, mit $q \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

Q.E.D.

**Folgerung 6.10**

- $\lambda(x) := e^{i\zeta(x)}$ *löst* (6.7) *und ist stetig in $x$.*

- $U_\rho(x) := e^{i\zeta(x)} U_0(x) W_0(\xi(x))$ *ist eine stark-stetige unitäre Darstellung der Translationsgruppe in der Darstellung $\pi_\rho$.*

Auch $e^{iqx} U_\rho(x), q \in \mathbb{R}^2$ hat die letzte Eigenschaft, allerdings werden wir später im Beweis von Satz 6.13 sehen, daß genau $U_\rho(x)$ die Spektrumsbedingung erfüllt.

**Folgerung 6.11** *Nach dem SNAG-Theorem (Segal, Neumark, Ambrose, Godement, siehe z.B. [22, S. 375] und Literatur dort) gibt es ein Spektralmaß $E_\rho(p)$ auf $\mathbb{R}^2$ so, daß gilt (im Norm-Sinne):*

$$U_\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ipx} dE_\rho(p)$$

[ii] Es gibt auch unstetige Lösungen dieser homogenen Gleichung, sogenannte additive Funktionen, die Logarithmen der Funktionen $\eta$ aus dem Beweis von Satz 3.1.

Wir können jetzt Energie- $H_\rho$ und Impulsoperator $\mathbf{P}_\rho$ in der Darstellung $\pi_\rho$ als starke Integrale

$$H_\rho := \int_{\mathbb{R}^2} p_0 dE_\rho(p),$$
$$\mathbf{P}_\rho := \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{p} dE_\rho(p)$$

definieren. Wir kennen ihr Spektrum noch nicht, wissen insbesondere nicht, ob $H_\rho$ von unten beschränkt ist.

## 6.4 Spektrumsbedingung

**Definition 6.12** Ein Maß oder eine Distribution $\mu(p), p \in \mathbb{R}^2$ erfülle die *Spektrumsbedingung*, wenn gilt:

1. $\operatorname{supp}\mu \subset \overline{V_0^+}$ und
2. $\operatorname{supp}\mu \subset a + \overline{V_0^+}, a \in \overline{V_0^+} \Rightarrow a = 0$.

Wenn $E_\rho(p)$ die Spektrumsbedingung erfüllt, bedeutet das, daß $H_\rho$ und der Massenoperator $M_\rho^2 := H_\rho^2 - \mathbf{P}_\rho^2$ positive Operatoren sind. Es gibt dann in der Darstellung $\pi_\rho$ nur Zustände mit nicht negativer Energie und nicht negativer Masse.

Wir untersuchen zunächst den Impulsgehalt einer hinreichend großen Menge von Zuständen, um dann auf den Träger von $E_\rho(p)$ zu schließen.

**Satz 6.13** *Das mit dem $\pi_0$-Vakuumvektor $\Omega$ assoziierte Impulsraum-Maß $\langle\Omega, E_\rho(p)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}$ erfüllt die Spektrumsbedingung.*

BEWEIS:

1. Für die durch das positive endliche Maß $\langle\Omega, E_\rho(p)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}$ gegebene Distribution $T$ gilt für $\forall\phi \in \mathcal{S}_\mathbb{C}(\mathbb{R}^2)$

$$T(\widetilde{\phi}) := \int \widetilde{\phi}(p) d\langle\Omega, E_\rho(p)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} = \frac{1}{2\pi}\int \phi(x)\langle\Omega, U_\rho(x)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} dx = \frac{1}{2\pi}F(\phi).$$

   mit einer (stetigen) Funktion positiven Typs (Satz von Bochner [20, Thm. IX.9]) $F(x) := \langle\Omega, U_\rho(x)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}$. $F$ hängt natürlich auch von $\rho$ ab, aber um die Notation nicht zu überfrachten, vermerken wir diese Abhängigkeit nicht explizit (ebensowenig wie bei $\xi(x)$ und $\zeta(x)$).

2. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} F(x) = \langle\Omega, U_\rho(x)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \langle\Omega, e^{i\zeta(x)}U_0(x)W_0(\xi(x))\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} \\ &= e^{i\zeta(x)}\langle\Omega, W_0(\xi(x))\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} \\ &= e^{i\zeta(x) - \frac{1}{4}\|\xi(x)\|_0^2} \end{aligned}$$

   Die Funktion im Exponenten

$$\begin{aligned} f(x) &:= i\zeta(x) - \frac{1}{2}\int |e^{-i\bar{p}x} - 1|^2 |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= \int |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \left( i\sin(\bar{p}x) - \frac{1}{2}(2 - 2\cos(\bar{p}x)) \right) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= \int |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 (e^{i\bar{p}x} - 1) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \end{aligned}$$

hat eine Fortsetzung auf die Röhre $\mathbb{R}^2 + i\overline{V_0^+}$

$$f(z) := f(x + i\eta) = \int |\widetilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 (e^{i\bar{p}x} e^{-\bar{p}\eta} - 1) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}.$$

Also läßt sich auch $F$ auf diese Röhre fortsetzen. Da $\operatorname{Re} f(z) \leq 0$, ist $F(z) := e^{f(z)}$ beschränkt.

3. Setzen wir $z_\pm = z_0 \pm \mathbf{z}$. Dann ist $\operatorname{Im} z \in V_0^+$ $(\overline{V_0^+}) \Leftrightarrow \operatorname{Im} z_\pm \in \mathbb{R}^+$ $(\mathbb{R}_0^+)$ und es gilt:

$$f(z) = f_+(z_+) + f_-(z_-)$$

mit

$$\begin{aligned} f_-(z_-) &= \int_0^\infty |\widetilde{\rho}_+(\mathbf{p})|^2 \left(e^{i\mathbf{p}z_-} - 1\right) \frac{d\mathbf{p}}{2\mathbf{p}}, \\ f_+(z_+) &= -\int_{-\infty}^0 |\widetilde{\rho}_-(\mathbf{p})|^2 \left(e^{-i\mathbf{p}z_+} - 1\right) \frac{d\mathbf{p}}{2\mathbf{p}}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Beachte, daß $\widetilde{\rho}(\mathbf{p}) = \widetilde{\rho}_+(\mathbf{p})$ für positive $\mathbf{p}$ und $\widetilde{\rho}(\mathbf{p}) = \widetilde{\rho}_-(\mathbf{p})$ für negative $\mathbf{p}$.

4. $f(z)$ ist in der offenen Röhre $\mathbb{R}^2 + iV_0^+$ analytisch, denn $f_\pm(z_\pm)$ sind es auf $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$. Dies weist man nach, indem man zeigt, daß $f_\pm(z)$ reell stetig differenzierbar ist und die Ableitungen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen.
Exemplarisch sei hier gezeigt, daß $f_+(u + iv)$ nach $v$ differenzierbar ist für $v \in \mathbb{R}^+$. $h$ sei dabei so klein gewählt, daß immer noch $v - |h| > 0$:

$$\frac{f_+(u + i(v + h)) - f_+(u + iv)}{h} = \int_0^\infty |\widetilde{\rho}_+(\mathbf{p})|^2 \left(\frac{e^{-\mathbf{p}h} - 1}{\mathbf{p}h}\right) e^{i\mathbf{p}(u+iv)} d\mathbf{p}$$

Der Integrand konvergiert für $h \to 0$ punktweise in $\mathbf{p}$ gegen $-\mathbf{p}$. Da ferner $|\frac{e^{-\mathbf{p}h}-1}{ph}| \leq e^{\mathbf{p}|h|}, p > 0$ (aufgrund der Konvexität der Exponentialfunktion) und $v - |h|$ positiv, kann man den gesamten Integranden durch die $dp$-integrable Funktion $|\widetilde{\rho_+}(\mathbf{p})|^2$ abschätzen. Mithin folgt aus dem Satz der dominierten Konvergenz, daß man Ableitung und Integral vertauschen darf.

5. Also ist $F(z)$ analytisch auf $\mathbb{R}^2 + iV_0^+$ und beschränkt durch eine Konstante auf $\mathbb{R}^2 + i\overline{V_0^+}$. Mithin sind die Voraussetzungen von [20, Satz IX.16][iii] erfüllt, und die Funktion $F(x)$ ist die Fouriertransformierte einer temperierten Distribution $T(p)$ mit Träger in $\overline{V_0^+}$.
Dieser Aussage ist äquivalent, daß das Maß $\langle\Omega, E(p)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}$ Träger in $\overline{V_0^+}$ hat.
Damit ist der erste Teil der Spektrumsbedingung bewiesen.

6. Für den zweiten Teil benötigen wir noch eine Aussage darüber, wie schnell $F(z), \operatorname{Im} z \in V_0^+$, im Unendlichen maximal abfällt. Dazu zeigen wir, daß

[iii] Reed und Simon benutzen eine andere Konvention bei der Fouriertransformation und statt des Minkowskischen Skalarproduktes das Euklidische. Um an deren Definitionen Anschluß zu finden, sei $\mathcal{C} : \widetilde{\phi}(p_0, \mathbf{p}) \mapsto \widetilde{\phi}(-p_0, \mathbf{p})$, also die Spiegelung an der räumlichen Achse.
Damit gilt: $\mathcal{C}\widetilde{\phi} = \hat{\phi}$. Und weiter:

$$T(\widetilde{\phi}) = T(\mathcal{C}\hat{\phi}) = (\mathcal{C}T)(\hat{\phi}) = \widehat{\mathcal{C}T}(\phi) = \frac{1}{2\pi} F(\phi).$$

$F$ ist aber analytisch und beschränkt in $\mathbb{R}^2 + iV_0^+$, also hat $\mathcal{C}T$ Träger in $-\overline{V_0^+}$ und damit $T$ im gespiegelten Kegel $\overline{V_0^+}$.

$\operatorname{Re} f_-(z_-)$ für große $z_-$ langsamer als $-\ln(|z_-|)$ gegen $-\infty$ geht (analog für $f_+(z_+)$). Da wir wissen, daß $\operatorname{Re} f_-(z_-) \leq 0$, reicht es, die Beträge zu betrachten:

$$|\operatorname{Re} f_-(z_-)| \leq \int_0^1 |\widetilde{\rho}_+(\mathbf{p})|^2 |e^{ipz_-} - 1| \frac{d\mathbf{p}}{2\mathbf{p}} + \not{c},$$

denn $\widetilde{\rho}_+$ fällt schnell ab. Substituieren wir $s = |z_-|\mathbf{p} \geq 0$, dann gilt weiter:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{|z_-|} |\widetilde{\rho}_+\Big(\frac{s}{|z_-|}\Big)|^2 \frac{|e^{i\frac{z_-}{|z_-|}s} - 1|}{2s} ds + \not{c} \\ &\leq \begin{cases} \not{c} & |z_-| \leq 1 \\ \not{c} \int_1^{|z_-|} |\widetilde{\rho}_+(\frac{s}{|z_-|})|^2 \frac{|e^{i\frac{z_-}{|z_-|}s} - 1|}{2s} ds + \not{c} & |z_-| > 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{6.10}$$

und für den unteren Zweig:

$$\leq \not{c} \int_1^{|z_-|} \frac{1}{s} ds + \not{c} = \not{c} \ln(|z_-|) + \not{c},$$

denn $\operatorname{Re} \frac{iz_- s}{|z_-|} \leq 0$. Zusammengefaßt also:

$$|\operatorname{Re} f_-(z_-)| \leq \begin{cases} \not{c} & |z_-| \leq 1 \\ \not{c} \ln(|z_-|) + \not{c} & |z_-| > 1 \end{cases}.$$

Mit der analogen Aussage für $f_+(z_+)$ folgt dann, daß $\operatorname{Re} f(z)$ für $|z| \to \infty$ nicht schneller als logarithmisch (wenn überhaupt) gegen $-\infty$ geht und damit $F(z)$ nicht schneller als eine rationale Funktion gegen Null.

7. Es bleibt zu zeigen, daß $\operatorname{supp}\langle\Omega, E_\rho(p)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}$ nicht im Inneren von $\overline{V_0^+}$ liegt. Habe $\langle\Omega, E_\rho(p)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}$ Träger sogar in $a + \overline{V_0^+}, a \in \overline{V_0^+}$.
Seien $\mathcal{V}_a : \widetilde{\phi}(p) \mapsto \widetilde{\phi}(p-a)$ die Translationen im Impulsraum. Dann hat $(\mathcal{V}_{-a}T)(p)$ Träger in $\overline{V_0^+}$. Es gilt weiter:

$$(\mathcal{V}_{-a}T)(\widetilde{\phi}) = T(\mathcal{V}_a\widetilde{\phi}) = F(e^{-ia\cdot}\phi) = (e^{-ia\cdot}F)(\phi).$$

Dann muß $e^{-iaz}F(z)$ in $\mathbb{R}^2 + i\overline{V_0^+}$ polynomial beschränkt sein nach [20, Satz IX.16][iii]. $F(z)$ ist das ja auch. Aber zu $a \in \overline{V_0^+}, a \neq 0$, sogar zu $a \in \mathbb{R}^2 \setminus (-\overline{V_0^+})$, gibt es eine Richtung $\eta_0 \in V_0^+$ mit $a\eta_0 \geq 0$, so daß mit $\eta = s\eta_0, s \to \infty$, $|e^{-iaz}| = |e^{a\eta}|$ exponentiell anwächst. Und für große $\eta$ fällt $F(z)$ wegen 6 nicht schneller als eine rationale Funktion ab, kann also den exponentiellen Anstieg nicht kompensieren. Ergo ist $e^{-iaz}F(z)$ nicht polynomial beschränkt.

Man sieht hieran auch, daß $U_\rho(x)$ die kanonische Wahl ist: $e^{iqx}U_\rho(x),\ q \in \mathbb{R}^2$ hat Träger in $q + \overline{V_0^+}$.

Q.E.D.

**Folgerung 6.14** *Die mit den Vektoren $W_0(f)\Omega, f \in \mathcal{L}$ assoziierten Impulsraum-Maße $\langle W_0(f)\Omega, E_\rho(p)W_0(f)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}$ erfüllen die Spektrumsbedingung.*

BEWEIS: Es sei:

$$\begin{aligned} T'(\widetilde{\phi}) &:= \int \widetilde{\phi}(p) d\langle W_0(f)\Omega, E_\rho(p) W_0(f)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \phi(x) \langle W_0(f)\Omega, U_\rho(x) W_0(f)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} dx, \end{aligned}$$

und es gilt weiter:

$$\begin{aligned} W_0(-f)U_\rho(x)W_0(f) &= W_0(-f)e^{i\zeta(x)}U_0(x)W_0(\xi(x))W_0(f) \\ &= e^{i\zeta(x)}e^{-\frac{i}{2}\sigma(\xi(x),f)}U_0(x)W_0(-f_{-x})W_0(\xi(x)+f) \\ &= e^{i\zeta(x)}e^{-\frac{i}{2}\sigma(\xi(x),f+f_{-x})}e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,f_{-x})}U_0(x)W_0(\xi(x)-(f_{-x}-f)) \end{aligned}$$

Mit $\rho'(\mathbf{p}) := \rho(\mathbf{p}) - \sqrt{2\pi}\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})$ und den entsprechenden $\xi'(x)$ und $\zeta'(x)$ rechnet man leicht nach, daß dies ergibt:

$$= e^{i\zeta'(x)}U_0(x)W_0(\xi'(x)) = U_{\rho'}(x).$$

D.h. es gilt

$$T'(\widetilde{\phi}) = \frac{1}{2\pi}\int \phi(x)\langle\Omega, U_{\rho'}(x)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} dx = \frac{1}{2\pi}F'(\phi)$$

mit $F'(x) := \langle\Omega, U_{\rho'}(x)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}$, und dann schließt man wie in Satz 6.13. Q.E.D.

**Folgerung 6.15** *Das Spektralmaß $E_\rho(p)$ erfüllt die Spektrumsbedingung. D.h. jede Darstellung $\pi_{L_\rho}$ ist von positiver Energie.*

BEWEIS: Nach dem zuvor Bewiesenen gilt also für alle Borelmengen $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, $\Delta \cap \overline{V_0^+} = \emptyset$, $\forall f \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} &\langle W_0(f)\Omega, E_\rho(\Delta)W_0(f)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} = 0 \\ \Leftrightarrow &\|E_\rho(\Delta)W_0(f)\Omega\|_{\mathcal{H}_0} = 0 \end{aligned}$$

D.h. der Projektor $E_\rho(\Delta)$ ist Null auf der totalen Menge der $W_0(f)\Omega$ und damit Null auf ganz $\mathcal{H}_0$. Also gilt $\mathrm{supp}\, E_\rho \subset \overline{V_0^+}$.

Gölte $\mathrm{supp}\, E_\rho(\Delta) \subset a + \overline{V_0^+}$, $a \in \overline{V_0^+}$, dann folgte in Widerspruch zu Folgerung 6.14, daß auch $\mathrm{supp}\langle W_0(f)\Omega, E_\rho(p)W_0(f)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} \subset a + \overline{V_0^+}$ für mindestens ein $f \in \mathcal{L}$. Q.E.D.

Folgerung 6.15 gilt natürlich auch für die Vakuumdarstellung, nämlich mit $\rho = 0$.

# Kapitel 7

# Teilcheninterpretation

Betrachten wir die von $L_\rho$ erzeugten Zustände. (Sowohl $L_{\rho_0,\tau}, \rho_0, \tau \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ als auch $\sigma(f,\cdot)$ sind darunter subsumiert.) Aus den in den Gleichungen (2.2), (5.4) und (5.6) dargelegten Eigenschaften folgt unmittelbar (angesichts Hilfssatz 4.2), daß diese Zustände für große raumartige oder zeitartige Entfernungen vom Koordinatenursprung das Vakuum darstellen.

Das bedeutet, daß sich alle lokalen Anregungen nur in lichtartige Richtungen fortpflanzen können. Man erwartet in unserem Modell daher keine massiven teilchenartigen Anregungen. Wir stehen vor der Frage, ob unser Modell eine Beschreibung durch masselose teilchenartige Anregungen zuläßt.

Wigners Analyse [27] der irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe legt nahe, den Raum der Zustände mit scharfer Masse als Ein-Teilchen-Raum aufzufassen. Ein durch solche Zustände beschreibbares Teilchen heißt *Wigner-Teilchen.* Legt man aber die intuitivere Auffassung von einem Teilchen als einer Anregung eines Systems zugrunde, die zu jeder Zeit im wesentlichen in einem bestimmten Raumgebiet lokalisiert ist, dann ist die Charakterisierung nach Wigner, speziell im Fall einer Theorie ohne Massenlücke, unzureichend: Es gibt elementare teilchenartige Anregungen, die nicht durch Eigenzustände des Massenoperators beschrieben werden können. Diese nennt man *Infrateilchen* [24].

Deshalb ist es für uns wichtig, herauszufinden, ob es in den geladenen Sektoren Zustände gibt, die Eigenzustände des Massenoperators zum Eigenwert Null sind.

## 7.1 Teilchen oder Infrateilchen?

Betrachten wir zunächst wieder die aus den Beweisen von Satz 6.12 und Folgerung 6.14 bekannten Korrelationsfunktionen $F$. Sie hängen für lichtartige Argumente entweder nur von den positiven oder von den negativen Impulsen in $\widetilde{\rho}$ ab:

**Hilfssatz 7.1** *Sei $x_t = (t,t)$, d.h. $x_+ = 2t,\ x_- = 0$, dann gilt:*

$$\lim_{t\to\pm\infty} F(x_t) = \lim_{t\to\pm\infty} e^{f_+(2t)} = \begin{cases} e^{-\int_{-\infty}^{0} |\widetilde{\rho}_-(\mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2\mathbf{p}}} & \widetilde{\rho}_-(0) = 0 \\ 0 & \widetilde{\rho}_-(0) \neq 0 \end{cases}.$$

*Analog gilt für $x_t = (t,-t)$:*

$$\lim_{t\to\pm\infty} F(x_t) = \lim_{t\to\pm\infty} e^{f_-(2t)} = \begin{cases} e^{\int_{0}^{\infty} |\widetilde{\rho}_+(\mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2\mathbf{p}}} & \widetilde{\rho}_+(0) = 0 \\ 0 & \widetilde{\rho}_+(0) \neq 0 \end{cases}.$$

Beweis: Der obere Zweig beider Gleichungen folgt mit dem Riemann-Lebesgue-Lemma [20, Thm. IX.7].

Den unteren Zweig erhält man auf folgende Weise, hier exemplarisch für $x = (t,t), t \to \pm\infty$ gezeigt: Zunächst gewinnt man analog zu Gl. (6.10) eine Abschätzung von $|\mathrm{Re}\, f_-(2t)|$ nach *unten*:

$$|\mathrm{Re}\, f_-(2t)| \geq \begin{cases} 0 & |2t| \leq 1 \\ \not{c} \int_1^{|2t|} |\widetilde{\rho}_+(\frac{s}{|2t|})|^2 \frac{|1 - \overbrace{\mathrm{Re}\, e^{i\frac{2t}{|2t|}s}}^{\cos(s)}|}{2s} ds - \not{c} & |2t| > 1 \end{cases}$$

Wählen wir jetzt ein $1 > \delta > 0$ so, daß gilt $|\widetilde{\rho}_+(s)| > \frac{1}{2}|\widetilde{\rho}_+(0)|$ für $s \in (0,\delta)$, dann folgt für $\forall t, |2t| > \frac{1}{\delta} > 1$:

$$\geq \not{c} \int_1^{|\delta 2t|} \sin^2\left(\frac{s}{2}\right) \frac{ds}{s} - \not{c}.$$

Und dieses letzte Integral divergiert wie $\not{c}\ln(|t|)$ für $t \to \pm\infty$, wie man durch Abschätzung mit entsprechenden Reihensummen beweist. Mithin geht $\mathrm{Re}\, f_-(2t)$ gegen $-\infty$ und $F(x_t)$ gegen Null für $t \to \pm\infty$. Q.E.D.

In 1+1 Dimensionen und der Darstellung $\pi_\rho$ schreibt sich das Quadrat des Massenoperators

$$M_\rho^2 = H_\rho^2 - \mathbf{P}_\rho^2 = (H_\rho - \mathbf{P}_\rho)(H_\rho + \mathbf{P}_\rho) = (H_\rho + \mathbf{P}_\rho)(H_\rho - \mathbf{P}_\rho).$$

Er hat genau dann einen (eigentlichen) Eigenvektor in $\mathcal{H}_0$ zum Eigenwert $m^2 = 0$, d.h. einen nicht trivialen Kern, wenn mindestens einer von $H_\rho \pm \mathbf{P}_\rho$ nicht trivialen Kern (in $\mathcal{H}_0$) hat:

**Satz 7.2** *$H_\rho \pm \mathbf{P}_\rho$ haben beide einen nicht trivialen Kern. In jedem der durch $L_\rho$ bestimmten Ladungssektoren gibt es Zustände mit scharfer Masse $m = 0$.*

Beweis: Nach dem Ergodensatz [3, Kap. 3.4.1][i] gewinnt man den Projektor $N_\rho$ auf den Eigenraum zum Eigenwert Null von $H_\rho - \mathbf{P}_\rho$ mittels

$$N_\rho = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{it(H_\rho - \mathbf{P}_\rho)} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_\rho(t,t) dt$$

im Sinne der starken Operatortopologie. Testen wir diesen Projektor auf den Zuständen $W_0(g)\Omega, g \in \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \langle W_0(g)\Omega, N_\rho W_0(g)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle W_0(g)\Omega, U_\rho(t,t) W(g)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \Omega, U_{\rho'}(t,t)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F'(t,t) dt \end{aligned}$$

mit $F'$ gegeben durch $\rho'(\mathbf{p}) = \rho(\mathbf{p}) - \sqrt{2\pi}\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p}) g(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$. Nach Hilfssatz 7.1 konvergiert $F'(t,t)$, also auch dieses Integral, und zwar gegen denselben Grenzwert:

$$= \begin{cases} e^{-\int_{-\infty}^0 |\widetilde{\rho'_-}(\mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2\mathbf{p}}} & \widetilde{\rho'}_-(0) = \widetilde{\rho}_-(0) + \sqrt{2\pi}\widetilde{g}(0) = 0 \\ 0 & \widetilde{\rho'}_-(0) = \widetilde{\rho}_-(0) + \sqrt{2\pi}\widetilde{g}(0) \neq 0 \end{cases}. \tag{7.1}$$

[i]Der Beweis a.a.O bleibt gültig auf nicht-separablen Hilberträumen.

D.h. man kann in dem durch $L_\rho$ bestimmten geladenen Sektor immer Zustände finden, die einen Anteil haben, der scharfe Masse $m = 0$ hat.

Der Beweis für $H_\rho + \mathbf{P}_\rho$ ist ganz analog. Entscheidend dafür, daß der Zustand $W_0(g)\Omega$ in der Darstellung $\pi_\rho$ einen Anteil scharfer Masse hat, ist hier die Bedingung $\widetilde{\rho}'_+(0) = \widetilde{\rho}_+(0) - \sqrt{2\pi}\widetilde{g}(0) = 0$. Q.E.D.

Ob diese Eigenzustände zu Masse $m = 0$ tatsächlich als Ein-Teilchen-Zustände interpretiert werden können, klären wir in dem folgenden Abschnitt.

## 7.2 Pseudoteilchen!

Wir wollen die Korrelationen von gegeneinander verschobenen Messungen betrachten. (Sie unterscheiden sich nicht sehr von denen im vorangehenden Abschnitt.)

$$\begin{aligned}\omega_\rho(W(-f)W(f_x)) &= e^{iL_\rho(f_x - f)}\omega_0(W(-f)W(f_x)) \\ &= e^{-i\sigma(\xi(x),f)}e^{i\sigma(f,f_x)}e^{-\frac{1}{4}\|f_x - f\|_0^2}\end{aligned}$$

Liegen $\operatorname{supp} f$ und $\operatorname{supp} f_x$ beide in demselben der durch lichtartige Fortsetzung von $\operatorname{supp}\rho$ definierten Quadranten (d.h. beide entweder raumartig links oder rechts oder in der Zukunft oder Vergangenheit von $\operatorname{supp}\rho$), dann ist $L_\rho(f_x - f) = 0$, d.h. es herrschen die gleichen Korrelationen wie im Vakuum (m.a.W. dort ist Vakuum).

Für $x = (t,t)$, d.h. rechts-lichtartig verschobene Messungen hängt

$$\begin{aligned}\sigma(\xi(t,t),f) &= 2\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Im}\int \overline{\left(e^{-i(|\mathbf{p}|-\mathbf{p})t} - 1\right)\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\widetilde{\rho}(\mathbf{p})}\widetilde{f}(|\mathbf{p}|,\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{0}\overline{(e^{2i\mathbf{p}t} - 1)\,\widetilde{\rho}_-(\mathbf{p})}\widetilde{f}(-\mathbf{p},\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{\mathbf{p}}\end{aligned}$$

nur von den Anteilen zu negativem Impuls $\mathbf{p} < 0$ von $\widetilde{\rho}$ ab, und $\widetilde{\rho}$ stimmt für diese $\mathbf{p}$ mit $\widetilde{\rho}_-$ überein. Man mißt sozusagen nur die Anteile des Zustands, die nach links laufen.

Mehr noch: Im Limes $t \to \pm\infty$ konvergiert $L_{\rho_{-(t,t)}}(f) = L_\rho(f_{(t,t)})$:

$$\begin{aligned}L_\rho(f_{(t,t)}) = &-\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{0}\overline{\widetilde{\rho}_-(\mathbf{p})}\underbrace{e^{i(|\mathbf{p}|-\mathbf{p})t}}_{e^{-2i\mathbf{p}t}}\widetilde{f}(-\mathbf{p},\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{\mathbf{p}} \\ &\underbrace{-\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Im}\int_{0}^{\infty}\overline{\widetilde{\rho}_+(\mathbf{p})}\widetilde{f}(\mathbf{p},\mathbf{p})\frac{d\mathbf{p}}{\mathbf{p}}}_{L_{\rho_+/2,\rho_+/2}}.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Der erste Summand konvergiert aufgrund des Riemann-Lebesgue-Lemmas und unseres Hilfssatzes A.7 gegen $\pm\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_-(0)2\pi\widetilde{f}(0)$, $t \to \pm\infty$. Für $x = (t,t) \to \infty$ in den durch die Pfeile $\nearrow, \swarrow$ in offensichtlicher Weise bezeichneten lichtartigen Richtungen ergibt sich als Limes von $L_\rho(f_x)$ ($\rho_\pm \in \mathcal{D}_\mathbb{R}(\mathbb{R})$, siehe (6.5)):

$$\begin{aligned}L_\rho^{\nearrow}(f) &= L_{\rho_+/2,\rho_+/2}(f) + \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_-(0)2\pi\widetilde{f}(0) \\ L_\rho^{\swarrow}(f) &= L_{\rho_+/2,\rho_+/2}(f) - \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_-(0)2\pi\widetilde{f}(0)\end{aligned}$$

und analog für $x = (t,-t), t \to \pm\infty$ :

$$\begin{aligned}L_\rho^{\nwarrow}(f) &= L_{\rho_-/2,-\rho_-/2}(f) - \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_+(0)2\pi\widetilde{f}(0) \\ L_\rho^{\searrow}(f) &= L_{\rho_-/2,-\rho_-/2}(f) + \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_+(0)2\pi\widetilde{f}(0),\end{aligned}$$

wobei noch anzumerken ist, daß über Gl. (5.4) und (5.6) hinaus sogar gilt (man addiere die Gleichungen (5.3) und (5.5)), $\rho_0 \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$:[ii]

$$\begin{aligned} L_{\rho_0/2,\rho_0/2}(f) &= \begin{cases} -\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_0(0)2\pi\widetilde{f}(0) & f\diagup\rho_0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_0(0)2\pi\widetilde{f}(0) & \rho_0\diagup f \end{cases}, \\ L_{\rho_0/2,-\rho_0/2}(f) &= \begin{cases} -\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_0(0)2\pi\widetilde{f}(0) & f\diagdown\rho_0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_0(0)2\pi\widetilde{f}(0) & \rho_0\diagdown f \end{cases}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

$L_{\rho_0/2,\pm\rho_0/2}$, bzw. die zugehörigen Zustände $\omega_{\rho_0/2,\pm\rho_0/2}$, beschreiben eine mit Lichtgeschwindigkeit nach rechts bzw. nach links laufende Störung und sind invariant unter Translationen auf dem entsprechenden Lichtstrahl (siehe Gl. (7.2)).

All diese Funktionale passen wieder in unser bekanntes Schema, und es gilt:

1. $\omega_\rho$ ist das Produkt seiner beiden asymptotisch links- und rechtslaufenden Anteile für große positive oder negative Zeiten, in dem Sinne, daß $\omega_\rho = \omega_0 \circ \gamma_\rho^{\nwarrow} \circ \gamma_\rho^{\nearrow} = \omega_0 \circ \gamma_\rho^{\swarrow} \circ \gamma_\rho^{\searrow}$ einerseits, und andererseits $\omega_\rho^{\nearrow} = \omega_\rho^{\swarrow} (= \omega_{\rho_+/2,\rho_+/2})$ und $\omega_\rho^{\nwarrow} = \omega_\rho^{\searrow} (= \omega_{\rho_-/2,-\rho_-/2})$, denn die zugehörigen Funktionale $L_\rho, L_\rho^{\nwarrow} + L_\rho^{\nearrow}, L_\rho^{\swarrow} + L_\rho^{\searrow}$ unterscheiden sich nur durch $\not{\epsilon}2\pi\widetilde{f}(0)$, führen damit nach Hilfssatz 4.2 zu den gleichen Zuständen.

   Dieses Resultat ist im Einklang mit der wechselwirkungsfreien Dynamik unseres Modells, der die masselose Klein-Gordon-Gleichung zugrunde liegt.

2. Die Zustände $\omega_\rho^{\nearrow}$ etc. sind dispersionsfrei, siehe Gl. (7.3) und invariant unter Verschiebung auf den entsprechenden Lichtstrahlen: Ihr „Wellenpaket" sieht zu allen Zeiten gleich aus. In dieser Hinsicht verhalten sie sich wie klassische, ausgedehnte Körper.

3. Da für $L_{\rho_0/2,\rho_0/2}, \rho_0 \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ mit $\widetilde{\rho'}(\mathbf{p}) := \frac{1}{2}(1+\mathrm{sgn}(\mathbf{p}))\widetilde{\rho}_0(\mathbf{p})$ gilt $\rho'_- = 0$, ist für den Zustand $\omega_{\rho_0/2,\rho_0/2}$ in Gl. (7.1)

$$\langle \Omega, N_{\rho'_-}\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0} = 1.$$

   Das bedeutet, daß diese Zustände Eigenzustände von $H'_\rho - \mathbf{P}'_\rho$ zum Eigenwert Null sind und Masse $m = 0$ haben. Ein analoges Resultat gilt für $\omega_{\rho_0/2,-\rho_0/2}$.

4. Für $\rho_0 \neq 0$ ist $\omega_{\rho_0/2,\pm\rho_0/2}$ sicher nicht der Vakuumzustand, denn er ist zwar invariant unter Verschiebungen auf *einem* Lichtstrahl, aber nicht unter denen auf dem anderen Lichtstrahl.

Der Zustandsvektor von $\omega_{\frac{\rho_0}{2},\frac{\rho_0}{2}}$ mit $\frac{\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_0(0)}{2} = 0$ liegt in der Vakuumdarstellung schon in dem von $\mathfrak{W}(\mathcal{L}_0)$ aufgespannten Teil des Hilbertraums $\mathcal{H}_0$, denn $\rho' = \Theta_+\rho_0$[iii], $\rho'$ wie eben, liegt in $\overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$ (Hilfssatz A.5) und folglich gilt $\omega_{\rho_0/2,\rho_0/2} = \langle W_0(\Theta_+\rho_0/\sqrt{2\pi})\Omega, \cdot W_0(\Theta_+\rho_0/\sqrt{2\pi})^*\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}$. In diesem Unterraum haben wir eine Fockraumstruktur (vgl. Bemerkung 2.5) über dem Einteilchenraum eines masselosen neutralen Bosons, eines „Photons". Diese Zustände sind nichts als kohärente Zustände mit mittlerer Photonenzahl $\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Theta_+\rho\|_0$. Daß diese Zustände Masse $m = 0$ haben, liegt daran, daß Summen von parallelen lichtartigen Vektoren im $\mathbb{R}^2$ wieder lichtartige Vektoren sind. Dies gilt natürlich auch in höheren Dimensionen, aber dort sind Wellenfunktionen mit Träger nur auf einem (halben) Lichtstrahl singuläre Objekte.

[ii] Der diagonale Strich deutet dabei die Trennung von $\mathrm{supp}\, f$ und $\mathrm{supp}\,\rho$ durch eine lichtartige Gerade der entsprechenden Richtung an; leider gibt es keine entsprechend gedrehten $\prec, \succ$, um die Notation aus Gl. (2.1) fortzusetzen.

[iii] $\widetilde{\Theta_+\rho}(\mathbf{p}) := \Theta(\mathbf{p})\widetilde{\rho}(\mathbf{p})$

Die Zustände $\omega_{\rho_0/2,\pm\rho_0/2}$ mit $\frac{\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho_0}(0)}{2} = q \neq 0$ liegen nicht im Vakuumsektor, sondern im Sektor mit Ladung $q$. Daß sie Masse $m = 0$ haben, ist, s.o, ein Artefakt der 1+1-dimensionalen Raum-Zeit. Doch auch abgesehen von der Tatsache, daß sie Eigenvektoren des Massenoperators sind, haben sie Teilchencharakter: Sie tauchen als asymptotische Zustände zu großen positiven und negativen Zeiten auf, sind zu jeder Zeit in einem festen Raumbereich lokalisiert (siehe Gl. (7.3)) und tragen Ladung $q$. Dies spricht dafür, sie als geladene *Teilchen* zu interpretieren.[iv]

Wir wollen sie *Pseudoteilchen* nennen, denn obwohl sie Masse $m = 0$ haben, liegt eine Infrateilchensituation vor. Es gibt nämlich keinen geladenen Zustand, der nicht auch neutrale Teilchen enthält:

**Satz 7.3 ([2], Prop. 4.4)** *Gilt für die Einschränkung eines Zustandes $\omega$ auf die Weyl-Unteralgebra $\mathfrak{W}(\mathcal{L}_0)$, daß $\omega|_{\mathfrak{W}(\mathcal{L}_0)} = \omega_0|_{\mathfrak{W}(\mathcal{L}_0)}$, dann folgt $\omega = \omega_0$ auf der gesamten Weyl-Algebra.*

Jetzt können wir wie folgt schließen:

Die Unteralgebra $\mathfrak{W}(\mathcal{L}_0)$ ist in jedem interessierenden Zustand $\omega$ kraft lokaler Normalität wieder regulär dargestellt und in der zugehörigen Darstellung existieren die Vernichter des Photons $a_\omega(f), f \in \mathcal{L}_0$ (vgl. Bem. 2.5 und [6, Lemma 5.2.12]).

Ein Zustand, der keine Photonen enthält, wird von allen $a_\omega(f), f \in \mathcal{L}_0$ vernichtet. Das kann nur der Vakuumzustand auf $\mathfrak{W}(\mathcal{L}_0)$ sein, ergo ist es der Vakuumzustand $\omega_0$ auf ganz $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$.

Ein „nacktes" geladenes Teilchen, das nicht von neutralen Bosonen begleitet wird, existiert also nicht (als normierbarer Zustand): Dies ist eindeutig eine Infrateilchensituation. Das Pseudoteilchen enthält das geladene Infrateilchen samt Photonenwolke.

Unsere Pseudoteilchenzustände haben noch eine interessante Eigenschaft, die, wie oben, eine Besonderheit der 1+1-dimensionalen Raum-Zeit ist:

Das Produkt zweier rechtslaufender Pseudoteilchen mit Ladungen $q_1, q_2$ ist wieder ein Ein-Pseudoteilchen-Zustand mit Ladung $q = q_1 + q_2$:

$$\omega_{\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}} = \omega_0 \circ \gamma_{\frac{\rho_1}{2},\frac{\rho_1}{2}} \circ \gamma_{\frac{\rho_2}{2},\frac{\rho_2}{2}} = \omega_0 \circ \gamma_{\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}} \tag{7.4}$$

mit $q_i = \frac{\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}_i(0)}{2}, \rho_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), i = 1,2$ und $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Wir können nicht entscheiden, wie viele geladene Pseudoteilchen ein solcher Zustand enthält, oder: Mehrere Pseudoteilchen sehen aus wie eines mit entsprechend größerer Ladung.

Auch ein Pseudoteilchenzustand ist gewissermaßen eine kohärente Überlagerung von Zuständen mit $1, 2, \ldots$ Photonen, jetzt allerdings mit unendlicher mittlerer Teilchenzahl „$\|\Theta_+\rho\|_0 = \infty$". Geladene Pseudoteilchen kommen durch kollektive Effekte niederenergetischer Photonen zustande. Sie sind gleichsam Infrarot-Singularitäten des elektrischen Feldes.

[iv]Folgen wir Wigner und versuchen, die Darstellung der Poincaré-Gruppe (wenn die Lorentz-Gruppe denn überhaupt unitär implementiert ist, siehe Abschnitt 8.2) auf dem Einteilchenraum auszureduzieren, so können wir Rechts- und Linksläufer als zu einer anderen Teilchensorte gehörig auffassen, denn die Lorentztransformationen in 1+1 Dimensionen lassen beide Lichtstrahlen separat invariant: Durch keine Lorentztransformation können wir einen Rechtsläufer überholen und damit zu einem Linksläufer machen.

Auch sind die selbst im Vakuumsektor auftretenden asymptotischen verschieden geladenen Teilchenzustände je nach ihrer Ladung in diesem strengen Sinne als verschiedene Teilchen aufzufassen. Die im Text folgende Erörterung zeigt aber Schwierigkeiten auf, diese Zustände überhaupt als Ein-Teilchen-Zustände zu interpretieren.

Eine vollständige Ausreduktion gelingt vermutlich nicht.

# Kapitel 8

# Abschließende Betrachtungen

## 8.1 Einige Bemerkungen

Zunächst wollen wir einige Eigenschaften unseres Modells erläutern, die für uns unerwartet waren.

Ein linkslaufendes Pseudoteilchen („Linksläufer“) kann man durch eine *lokale* Operation in einen Rechtsläufer reflektieren:

$$\omega_{\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}} = \omega_{\frac{\rho}{2},-\frac{\rho}{2}} \circ \gamma_{-\sigma(\rho/\sqrt{2\pi},\cdot)}, \quad \rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}).$$

Der Operator $W_0(\frac{-\rho}{\sqrt{2\pi}})$, der $\gamma_{-\sigma(\rho/\sqrt{2\pi},\cdot)}$ implementiert, ist ein lokaler Operator (Hilfssatz A.4).

In unserem Modell gibt es, obwohl ein Gaußsches Gesetz (1.6) gilt, Zustände, die Eigenzustände des Massenoperators sind. Das verwundert zunächst in Hinblick auf [9]. Aber die einfache Impulsraumgeometrie in 1+1 Dimensionen und Masse $m = 0$ ermöglichen genau dies: Unsere Zustände $\omega_{\frac{\rho}{2},\pm\frac{\rho}{2}}$ erfüllen – *mutatis mutandis* – Gleichung (13) in [9]. Das Schlupfloch ist, wie gesagt, die spezielle geometrische Situation in dieser niederdimensionalen Raum-Zeit.

Daß die Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion $F(x) = \langle\Omega, U_\rho(x)\Omega\rangle_{\mathcal{H}_0}$, $\rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, $\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0) \neq 0$ keinen diskreten Massenschalenbeitrag hat, darf nach unserer Analyse nicht darauf zurück geführt werden, daß man es mit einem Infrateilchen im direkten Sinne von Schroer [24] zu tun hat, wie in [11] angedeutet, sondern muß vielmehr damit erklärt werden, daß $L_\rho$ einen „Zwei-Pseudoteilchen-Zustand“ beschreibt: $\gamma_\rho$ erzeugt je einen Linksläufer und einen Rechtsläufer gleicher Ladung (vgl. Gl. (5.4)): $L_\rho = L_{\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}} + L_{\frac{\rho}{2},-\frac{\rho}{2}}$.

Dennoch sind auch unsere rechts- oder linkslaufenden Pseudoteilchenzustände in dem im vorigen Kapitel dargestellten Sinn keine Ein-Teilchen-Zustände. Da diese Zustände keine Dispersion haben, ist es nicht möglich, mit einer naiven Übertragung des in [10] vorgestellten Programms aus einem Pseudoteilchenzustand (oder sonstigen Zustand) ein Gewicht zu extrahieren, das einem nackten geladenen Teilchen entspricht. Denn dies setzt das Zerfließen des Zustandes mit der Zeit voraus: Die Wahrscheinlichkeit, *zwei* (oder drei oder vier usf.) Teilchen in einem Raumgebiet fester Größe nachzuweisen, sinkt schneller als die Wahrscheinlichkeit, ein einzelnes Teilchen im selben Raumgebiet nachzuweisen. In unserem Modell dagegen bewegen sich, da ungeladene Teilchen als auch geladene Pseudoteilchen masselos sind, alle Teilchen gleich schnell und können nicht räumlich auseinanderlaufen, da der Rand des Lichtkegels nur 1-dimensional ist. Sie bleiben daher zu allen Zeiten beieinander.

## 8.2 Lorentzinvarianz

In der QED in 1+3 Dimensionen gibt es sehr viele verschieden Sektoren mit gleicher Ladung [8], die man zu sogenannten Ladungsklassen zusammen faßt. Die einzelnen Sektoren unterscheiden sich durch die Feldverteilung im räumlich Unendlichen: Zwar ergibt die Integration des Feldes über eine große Sphäre kraft des Gaußschen Satzes die Ladung des Zustandes, aber die Verteilung des Flusses auf der Sphäre kann je nach Zustand sehr verschieden sein. Durch lokale Operationen können solche unterschiedlichen Feldverteilungen natürlich nicht ineinander überführt werden, Lorentz- und Rotationssymmetrie sind gebrochen.

In 1+1 Dimensionen reduziert sich die Integration über eine große Spähre auf die Differenz zweier Feldmessungen im linken bzw. rechten räumlichen Unendlichen (das ist dann die 0-Sphäre). Die Differenz ergibt die Ladung. Die einzige Freiheit, die man hat, ist die Addition einer konstanten Feldstärke. Da dies in unserem Modell wegen Hilfssatz 4.2 keine Auswirkungen hat, schließen wir, daß die Ladungsklassen der kohärenten Zustände für unser Modell genau einen Sektor, nämlich den zur Ladung $q$ enthalten. Ladungsklassen und Sektoren fallen hier zusammen.

Wir vermuten, daß die Lorentztransformationen in unserem Modell nicht gebrochen sind. Dies wird unterstützt von der Tatsache, daß in 1+1 Dimensionen die Lorentztransformationen $\Lambda(\beta), \beta = \operatorname{artanh}(v), v \in (-1, 1)$ auf die beiden Lichtstrahlen getrennt wirken, und zwar als Stauchung oder Streckung mit dem Faktor $e^{\mp\beta}$. D.h. $\forall f \in \mathcal{L}$:

$$\Lambda(\beta)\widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) = \begin{cases} \widetilde{f}(e^{-\beta}|\mathbf{p}|, e^{-\beta}\mathbf{p}) & \mathbf{p} > 0 \\ \widetilde{f}(e^{\beta}|\mathbf{p}|, e^{\beta}\mathbf{p}) & \mathbf{p} < 0\,. \\ \widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(0) & \mathbf{p} = 0 \end{cases}$$

Insbesondere sind das Impulsraummaß $\frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}$ und damit $\|\cdot\|_0$ und $\omega_0$ invariant unter den Lorentztransformationen. Des weiteren ist das Funktional $L_{\Lambda(\beta)^{-1}\rho - \rho}(\cdot), \rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, stetig in $\|\cdot\|_0$, *a fortiori* in $\|\cdot\|_h$, denn die Funktion $\widetilde{\rho}(\Lambda(\beta)^{-1}\mathbf{p}) - \widetilde{\rho}(\mathbf{p})$ hat eine Nullstelle bei Null. Mit ähnlichen Argumenten wie in Kapitel 6 sollte man die unitäre Implementierung der Lorentzgruppe bewerkstelligen können.

# Anhang A

## A.2 Anhang zu Kapitel 2

**Definition A.1** $J_n$ bezeichne für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine lineare Abbildung auf $\mathcal{L}_0$ mit

$$J_n : \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_0, \quad \widetilde{J_n f}(p) := i\epsilon_n(p_0)\tilde{f}(p)$$
$$i\epsilon_n(p_0) := i\frac{2}{\pi}\left(\mathrm{Si}(np_0) - \mathrm{Si}(\frac{p_0}{n})\right)$$

im Impulsraum bzw. im Ortsraum mit der Fouriertransformierten (im distributionellen Sinne) $i\hat{\epsilon}_n$ von $i\epsilon_n$ als Integralkern:

$$(J_n f)(x)(i\hat{\epsilon}_n * f)(x) = \int i\hat{\epsilon}_n(t) f(x_0 - t, \mathbf{x})dt$$
$$i\hat{\epsilon}_n(t) := \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{t} & \frac{1}{n} \leq |t| \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Offenbar gilt mit $i\epsilon(0) = 0$ punktweise für $\forall p_0 \in \mathbb{R}$

$$i\epsilon_n(p_0) \to i\epsilon(p_0), \quad \text{d.h. } \widetilde{J_n f}(p) \to \widetilde{\partial f}(p).$$

**Hilfssatz A.2** *Für $\forall n \in \mathbb{N}$ sind die $J_n : \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_0$ wohldefiniert.*

Beweis: Dazu sind folgende drei Dinge zu zeigen für festes $n \in \mathbb{N}$ und $\forall f \in \mathcal{L}_0$:

1. $J_n f$ hat kompakten Träger, denn

$$J_n f(x_0, \mathbf{x}) = \int_{-n}^{-\frac{1}{n}} i\hat{\epsilon}_n(t) f(x_0 - t, \mathbf{x})dt + \int_{\frac{1}{n}}^{n} i\hat{\epsilon}_n(t) f(x_0 - t, \mathbf{x})dt$$

   d.h. in $\mathbf{x}$ ist der Träger beschränkt wie bei $f$ und wegen $\exists C \in \mathbb{R}_+ : f(x_0 - t, \mathbf{x}) = 0$ für $|x_0 - t| > C$ gilt $(J_n f)(x) = 0$ für $|x_0| > C + n$.

2. $J_n f$ ist beliebig oft differenzierbar, denn die Integrale erstrecken sich über kompakte Bereiche der reellen Achse, und die Integranden sind beliebig oft differenzierbar, so daß wir Ableitungen und Integral vertauschen dürfen.

3. Also ist $Jf_n \in \mathcal{L}$. Es liegt sogar in $\mathcal{L}_0$, denn $\widetilde{J_n f}(0) = i\epsilon_n(0)\tilde{f}(0) = 0$

Q.E.D.

**Hilfssatz A.3** *Sei $f \in \mathcal{L}_0$, dann konvergiert die Folge von Funktionen $J_n f$ in $\|\cdot\|_h$ gegen die Funktion $\mathfrak{J} f$.*

Beweis: Wir hatten schon festgestellt, daß $\widetilde{J_n f}(p)$ punktweise gegen $\widetilde{\mathfrak{J} f}(p)$ konvergiert.

Wir müssen nur noch zeigen, daß $J_n f$ eine $\|\cdot\|_h$-Cauchy-Folge ist. Einerseits ist

$$\begin{aligned}\|J_n f - J_m f\|_0^2 &= 4\pi \int |i\epsilon_n(|\mathbf{p}|) - i\epsilon_m(|\mathbf{p}|)|^2 |\tilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &\to 0\end{aligned}$$

nach dem Theorem der dominierten Konvergenz [21, Theorem I.16], denn $i\epsilon_n(|\mathbf{p}|) \to i$ punktweise außer an $\mathbf{p} = 0$ und $|i\epsilon_n| < 2$ unabhängig von $n$. Andererseits existiert

$$\begin{aligned}|\sigma(h, J_n f - J_m f)| &= |4\pi \operatorname{Im} \int \overline{\tilde{h}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})}(i\epsilon_n(|\mathbf{p}|) - i\epsilon_m(|\mathbf{p}|))\tilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}| \\ &= |4\pi \operatorname{Re} \int \overline{\tilde{h}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})}(\epsilon_n(|\mathbf{p}|) - \epsilon_m(|\mathbf{p}|))\tilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}| \qquad \text{(A.1)} \\ &\to 0\end{aligned}$$

und geht mit derselben Begründung wie oben gegen Null, denn $\tilde{f}$ hat als Fouriertransformierte einer Testfunktion mit verschwindendem Integral eine Nullstelle mindestens erster Ordnung bei Null. Q.E.D.

N.B., die Existenz von (A.1) hängt empfindlich vom Verhalten von $\operatorname{Re} \tilde{f}$ bei Null ab. Für allgemeinere $f \in \overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$ erwartet man, daß die Quadrat-Integrierbarkeit des Realteiles bei Null nicht ausreicht, um die Existenz dieses Integrals zu gewährleisten. $\sigma(h, \cdot)$ behandelt $\operatorname{Re} \tilde{f}$ und $\operatorname{Im} \tilde{f}$ nicht symmetrisch. $i\epsilon(|\mathbf{p}|) = i$ vertauscht aber Im- und Re-Teil. Dies untermauert unsere Vermutung 2.9.

Aus diesem Hilfssatz A.3 folgt direkt

**Satz 2.10** *Sei $f \in \mathcal{L}_0$, dann gilt $\mathfrak{J} f \in \overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$.*

## A.5 Anhang zu Kapitel 5

**Hilfssatz A.4**

1. *Es gilt $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{L}}^{\sigma}$.*
2. *Hat $\rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ verschwindendes Integral, d.h. $\sqrt{2\pi}\tilde{\rho}(0) = 0$, dann gilt sogar $\rho \in \overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$.*
3. *Gl. (2.2) gilt entsprechend für $\sigma(\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}, f)$ mit $\operatorname{supp}_{\mathbb{R}^2} \rho = \{0\} \times \operatorname{supp}_{\mathbb{R}} \rho$. Ferner ist $W_0(\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}})$ ein lokaler Operator.*

Beweis: Sei $\alpha(x_0) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ und $\int \alpha(x_0) dx_0 = 1$. Dann folgt, daß $f_n(x_0, \mathbf{x}) := n\alpha(nx_0)\rho(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}$ ist. Hat $\rho$ verschwindendes Integral, so ist $f_n \in \mathcal{L}_0$. Die Fouriertransformierte schreibt sich $\widetilde{f_n}(p_0, \mathbf{p}) = \tilde{\alpha}(\frac{p_0}{n})\tilde{\rho}(\mathbf{p})$. Für $n \to \infty$ konvergiert sie punktweise gegen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{\rho}(\mathbf{p})$, denn $\tilde{\alpha}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \alpha(x_0) dx_0$. Die Folge $\widetilde{f_n}$ ist auch eine $\|\cdot\|_h$-Cauchy-Folge:

$$\|f_n - f_m\|_0^2 = 4\pi \int |(\tilde{\alpha}\left(\tfrac{|\mathbf{p}|}{n}\right) - 1) + (1 - \tilde{\alpha}(\tfrac{\mathbf{p}}{m}))|^2 |\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \to 0$$

Beide Summanden gehen auch nach Division durch $|\mathbf{p}|$ punktweise gegen Null und sind unabhängig von $n, m$ beschränkt durch eine Konstante, denn $\widetilde{\alpha}(\frac{|\mathbf{p}|}{n}) - 1 = \frac{|\mathbf{p}|}{n}(\widetilde{\alpha}'(0) + o(\frac{|\mathbf{p}|}{n}))$ mit einer Funktion $o(p_0)$, die für $p_0 \to 0$ gegen Null geht. So eine Funktion existiert, denn $\widetilde{\alpha}$ ist differenzierbar.

Ganz analog kann man zeigen, daß auch $\sigma(h, f_n - f_m) \to 0$. Das ist aber angesichts der Tatsache, daß lokal $\|\cdot\|_h$ und $\|\cdot\|_0$ die gleiche Topologie definieren (Bem. 2.8, Punkt 8), sofort klar, denn $\operatorname{supp} f_n \subset \operatorname{supp} \alpha \times \operatorname{supp} \rho$.

Aus dem Beweisgang oben folgt, daß $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_h} \rho$.

Da $\operatorname{supp} f_n \subset \operatorname{supp} f_{n+1}$ gilt, folgt $\operatorname{supp}_{\mathbb{R}^2} \rho = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{supp} f_n = \{0\} \times \operatorname{supp}_{\mathbb{R}} \rho$. Dies zeigt auch noch, daß $W_0(\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}})$ als Grenzwert von lokalen Operatoren aus einem festen Gebiet ein lokaler Operator ist.

Q.E.D.

## A.6 Anhang zu Kapitel 6

Für $\rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{L}}^{\sigma}$ definiere $\Theta_{\pm}\rho$ via $\widetilde{\Theta_{\pm}\rho}(\mathbf{p}) := \Theta(\pm\mathbf{p})\rho(\mathbf{p})$.

**Hilfssatz A.5** *Sei $\sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0) = 0$, dann gilt:*

1. $\Theta_{\pm}\rho \in \overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$, *und*
2. *die Fouriertransformierte von* $\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\widetilde{\rho}(\mathbf{p})$ *liegt auch in* $\overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$.

BEWEIS: Wir wissen bereits, daß $\rho, \sqrt{2\pi}\widetilde{\rho}(0) = 0$ in $\overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$ liegt (Hilfssatz A.4). Dann liegt auch $V(t,t)\rho, t \in \mathbb{R}$ in $\overline{\mathcal{L}_0}^{\sigma}$ und für $t \to \infty$ ist $V(t,t)\rho$ eine $\|\cdot\|_h$-schwache Cauchy-Folge, denn es gilt:

1. $\|V(t,t)\rho\|_0 = \|\rho\|_0$ (Invarianz von $\|\cdot\|_0$),
2. $$\begin{aligned} \sigma(h, V(t,t)\rho) &= 4\pi \operatorname{Im} \int \overline{\widetilde{h}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})} e^{i(|\mathbf{p}|-\mathbf{p})t} \widetilde{\rho}(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= 4\pi \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \overline{\widetilde{h}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})} \widetilde{\rho}(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &+ 4\pi \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{0} \overline{\widetilde{h}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})} e^{-2i\mathbf{p}t} \widetilde{\rho}(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &\to 4\pi \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \overline{\widetilde{h}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})} \widetilde{\rho}(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \\ &= 4\pi \operatorname{Im} \int \overline{\widetilde{h}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})} \widetilde{\Theta_{+}\rho}(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \end{aligned} \tag{A.2}$$
   aufgrund des Riemann-Lebesgue-Lemmas.
3. Aus den beiden Vorbemerkungen ergibt sich, daß $V(t,t)\rho$ $\|\cdot\|_h$-beschränkt ist, daher reicht es, die schwache Konvergenz auf Elementen aus $\mathcal{L}_0$ zu prüfen. Es gilt $\forall g \in \mathcal{L}_0$:
   $$(g, V(t,t)\rho)_h = (g, V(t,t)\rho)_0 + \sigma(h,g)\sigma(h, V(t,t)\rho).$$
   Daß $\sigma(h, V(t,t)\rho)$ konvergiert, haben wir schon oben gezeigt. Genauso gilt (ersetze in (A.2) Im durch Re und $\widetilde{h}$ durch $\widetilde{g}$)
   $$(g, V(t,t)\rho)_0 \to 4\pi \operatorname{Re} \int \overline{\widetilde{g}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})} \widetilde{\Theta_{+}\rho}(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}. \tag{A.3}$$

$V(t,t)\rho$ ist also eine schwache $\|\cdot\|_h$-Cauchy-Folge. Da Hilberträume schwach abgeschlossen sind, hat die Folge einen Grenzwert in $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$. Diesen identifizieren wir mit $\Theta_+\rho$.

Für $\Theta_-\rho$ verläuft der Beweis analog mit $V(t,-t)\rho$. Da $\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\widetilde{\rho}(\mathbf{p}) = (\Theta(\mathbf{p}) - \Theta(-\mathbf{p}))\widetilde{\rho}(\mathbf{p})$ folgt die zweite Aussage. Q.E.D.

Wir folgern noch

**Hilfssatz A.6** *Es gilt* $\xi(x) \in \overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ *mit* $\widetilde{\xi(x)}(\bar{p}) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sgn}(\mathbf{p})(e^{-i\bar{p}x} - 1)\widetilde{\rho}(\mathbf{p}), \rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. *Für zusammengesetzte* $\widetilde{\rho}'(\mathbf{p}) = \widetilde{\rho}(\mathbf{p}) + \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\widetilde{\tau}(\mathbf{p}) - \sqrt{2\pi}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\widetilde{f}(|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$ *folgt die gleiche Aussage.*

Beweis: Zunächst ist $(e^{-i\bar{p}x} - 1)\widetilde{\rho}(\mathbf{p}) = \widetilde{\rho_{-x}}(\mathbf{p}) - \widetilde{\rho}(\mathbf{p})$ aufgrund von Hilfssatz A.4 in $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$. Mit dem vorigen Hilfssatz folgt sofort, daß $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sgn}(\mathbf{p})(e^{-i\bar{p}x} - 1)\widetilde{\rho}(\mathbf{p})$ in $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$ liegt.

Die Aussage für die zusammengesetzten $\rho'$ folgt, denn $\operatorname{sgn}(\mathbf{p})^2 = 1$ und $f_{-x} - f, \tau_{-x} - \tau$ sind schon in $\overline{\mathcal{L}_0}^\sigma$. Q.E.D.

## A.7 Anhang zu Kapitel 7

Bekannt ist, daß $\frac{sin(nz)}{z}$ gegen $\pi\delta(z)$ konvergiert für $n \to \infty$, wir brauchen aber auch die „halbe“ $\delta$-Funktion:

**Hilfssatz A.7** *Sei* $\phi \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, *dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \phi(z) \frac{\sin(nz)}{z} dz = \frac{\pi}{2}\phi(0).$$

*Eine analoge Aussage gilt für die „negative“ Hälfte:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^0 \phi(z) \frac{\sin(nz)}{z} dz = \frac{\pi}{2}\phi(0)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \phi(z) \frac{\sin nz}{z} dz &= -\int_0^\infty \phi'(z)\,\mathrm{Si}(nz) dz \\ &\to -\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \phi'(z) dz = \frac{\pi}{2}\phi(0) \end{aligned}$$

und analog für die zweite Aussage. Q.E.D.

# Anhang B

# Konventionen und Symbolverzeichnis

## B.1 Notationskonventionen

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und ihre Komponenten werden $p = (p_0, \mathbf{p})$, $x = (x_0, \mathbf{x})$ geschrieben. Mit der Minkowski-Metrik

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

notieren wir das Skalarprodukt $pq = p_0 q_0 - \mathbf{pq} = p_0 q^0 + p_1 q^1 = p^0 g_{00} q^0 + p^1 g_{11} q^1$. Die Fouriertransformierte und -rücktransformierte im $\mathbb{R}^{1+1}$ sind

$$\widetilde{f}(p) := \frac{1}{2\pi} \int f(x) e^{ipx} d^2x, \quad f(x) := \frac{1}{2\pi} \int \widetilde{f}(p) e^{-ipx} d^2p.$$

Auf $\mathbb{R}$ haben wir, wenn $\rho$ von $\mathbf{x}$ abhängt, entsprechend:

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{p}) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{px}} dx, \quad \rho(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widetilde{f}(p) e^{i\mathbf{px}} d\mathbf{p}.$$

Wird $\rho$ aufgefaßt als Funktion von $x_0$, ist es genau umgekehrt. Die adjungierte Wirkung wird mit

$$\mathrm{Ad}_U(\cdot) = U \cdot U^*$$

bezeichnet. Schreibweisen wie

$$\mathrm{Im} \int \cdots d^2x, \quad \mathrm{Re} \int \cdots d\mathbf{p}$$

sind, falls das Integral nicht existiert, zu verstehen als

$$\int \mathrm{Im}(\cdots) d^2x \quad \text{etc.}$$

Dies, um Klammern um das Argument zu sparen.

## B.2 Symbolverzeichnis

| | |
|---|---|
| $\Box$ | D'Alembert-Operator in 1+1 Dimensionen, S. 10 |
| $\sim$ | Äquivalenzrelation in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$: $f \sim g \Leftrightarrow \Box(f-g) = 0$, S. 10 |
| $\prec, \succ, \curlywedge, \curlyvee$ | siehe Gl. (2.1), S. 10 |
| $\lvert q \rvert$ | euklidische Länge des Vektors $q \in \mathbb{R}^2$, S. 27 |
| $\lVert\cdot\rVert_0$ | Hilbertnorm auf $\mathcal{L}_0$, S. 11 |
| $\lVert f\rVert_h := \sqrt{\lVert f\rVert_0^2 + \sigma(h,f)^2}, \quad h \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_0$ | noch eine Hilbertnorm auf $\mathcal{L}_0$, S. 14 |
| $(\cdot,\cdot)_0$ | zu $\lVert\cdot\rVert_0$ gehörendes reelles Skalarprodukt, S. 11 |
| $(\cdot,\cdot)_h$ | zu $\lVert\cdot\rVert_h$ gehörendes reelles Skalarprodukt, S. 15 |
| $\alpha_x$ | Translationsautomorphismus, S. 27 |
| $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$ | Algebra der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}_0$, S. 17 |
| $\mathbb{C}$ | Menge der komplexen Zahlen, S. 34 |
| $\not c$ | Reehs universelle Konstante zur Vermeidung von allzu vielen Konstantensymbolen $C_1, C_2, C', C'', \dots \in \mathbb{R}^+$ mit den „Rechenregeln“: $\not c \in \mathbb{R}^+$, $\not c + \not c = \not c$, $\not c \not c = \not{\not c}$ und $\frac{c}{\not c} = \not c$ sowie ebenso für Addition, Multiplikation und Division mit pos. Zahlen, S. 36 |
| $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ | Menge der reellwertigen, unendlich oft differenzierbaren Testfunktionen über dem $\mathbb{R}^2$, S. 10 |
| $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ | Menge der reellwertigen Testfunktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, S. 8 |
| $\Delta(x)$ | die Kommutatorfunktion des masselosen Bosons in 1+1 Dimensionen, S. 10 |
| $\epsilon(p_0) := \operatorname{sgn}(p_0)$ | die Signumfunktion in der zeitartigen Koordinate mit der Konvention $\epsilon(0) = 0$, S. 10 |
| $\gamma$ | allg. ein Automorphismus von $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$, S. 20 |
| $\gamma_D$ | kohärenter Automorphismus, S. 12 |
| $\gamma_\rho$ | von $L_\rho$ erzeugter kohärenter Automorphismus, S. 31 |
| $\gamma_{\rho,\tau}$ | von $L_{\rho,\tau}$ erzeugter kohärenter Automorphismus, S. 23 |
| $\mathcal{H}_0$ | Hilbertraum der Vakuumdarstellung, S. 12 |
| $\mathfrak{J}$ | fast eine komplexe Struktur auf $\mathcal{L}_0$, S. 12 |
| $\mathcal{L} := (\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)/\sim, \sigma)$ | Raum der Wellenfunktionen, S. 10 |
| $\mathcal{L}_0 := \{f \in \mathcal{L}, \widetilde{f}(0) = 0\}$ | Unterraum der „netten“ Funktionen von $\mathcal{L}$, S. 11 |
| $\mathcal{L}^\#$ | algebraisches Dual von $\mathcal{L}$, d.h. die Menge aller (auch unstetiger) Funktionale über $\mathcal{L}$, S. 12 |
| $L_\rho$ | Funktional auf $\mathcal{L}$ mit $\rho$ aus einer etwas erweiterten Menge von „Anfangswerten“, S. 31 |
| $L_{\rho,\tau}$ | Funktional auf $\mathcal{L}$ mit den „Anfangswerten“ $\rho$ und $\tau$ aus $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, S. 23 |
| $\mathbb{N}$ | Menge der natürlichen Zahlen, S. 17 |
| $\mathcal{O}(I) := (\{0\} \times I)''$ | der Doppelkegel mit Basis $I$, einem Intervall auf der Ortsachse, S. 13 |
| $\omega_0$ | nicht regulärer Vakuumzustand auf $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$, S. 11 |
| $\omega_D$ | kohärenter Zustand, S. 12 |
| $\omega_\rho$ | von $L_\rho$ erzeugter kohärenter Zustand, S. 31 |
| $\omega_{\rho,\tau}$ | von $L_{\rho,\tau}$ erzeugter kohärenter Zustand, S. 23 |
| $\bar{p}$ | $\bar{p} = (\lvert\mathbf{p}\rvert, \mathbf{p})$, S. 27 |
| $\pi_0$ | Vakuumdarstellung von $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$, S. 12 |
| $\pi_D$ | GNS-Darstellung von $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$ im Zustand $\omega_D$, S. 12 |
| $\pi_\rho$ | GNS-Darstellung von $\omega_\rho$, S. 31 |
| $\pi_{\rho,\tau}$ | GNS-Darstellung von $\omega_{\rho,\tau}$, S. 23 |

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Menge der reellen Zahlen , S. 10 |
| $\mathbb{R}_0^+$ | Menge der nicht-negativen reellen Zahlen, S. 35 |
| $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ | Menge der komplexwertigen Schwartzfunktionen auf $\mathbb{R}^2$, S. 34 |
| $\mathrm{Si}(\cdot)$ | Integralsinus: $\mathrm{Si}(z) := \int_0^z \frac{\sin(z)}{z} dz$, S. 45 |
| $\sigma(\cdot, \cdot)$ | symplektische Form auf $\mathcal{L}$ mit $\Delta(x)$ als Integralkern, S. 10 |
| $\mathbb{T}$ | komplexer Einheitskreis, S. 19 |
| $\Theta(\cdot)$ | die Heavyside-(Sprung-)Funktion, S. 6 |
| $U_0(x)$ | Translationen im Vakuumsektor, S. 29 |
| $U_\rho(x)$ | Translationen in der Darstellung $\pi_\rho$, S. 32 |
| $W_0(f)$ | Operator in Vakuumdarstellung $\pi_D$, S. 12 |
| $W_D(f)$ | Operator in Darstellung $\pi_D$, S. 12 |
| $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$ | Weylalgebra über $\mathcal{L}$, S. 11 |
| $\mathfrak{W}(\mathcal{L}_0)$ | Weyl-Unteralgebra von $\mathfrak{W}(\mathcal{L})$ über $\mathcal{L}_0$, S. 11 |

# Anhang C

# Literaturverzeichnis


[1] Fabio Acerbi: *Nonregular representations of CCR algebras and the problem of fermions bosonization in 1+1 dimensions.* Magisterarbeit, S.I.S.S.A., Triest, 1989/90.

[2] Fabio Acerbi, Gianni Morchio und Franco Strocchi: *Infrared singular fields and nonregular representations of canonical commution relation algebras.* J. Math. Phys. **34(3)** (1993), S. 899–914.

[3] Hellmut Baumgärtel und Manfred Wollenberg: *Mathematical Scattering Theory.* Basel, Boston: Birkhäuser 1983.

[4] Werner Bergengruen: *Der Tod von Reval.* Zürich: Arche 1949. Auch als Taschenbuch bei dtv.

[5] Ola Bratteli und Derek W. Robinson: *$C^*$- and $W^*$-Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States*, Band 1 von *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics.* Zweite Auf"—lage: Springer Verlag 1987.

[6] Ola Bratteli und Derek W. Robinson: *Equilibrium States, Models in Quantum Statistical Mechanics*, Band 2 von *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics.* Zweite Auf"—lage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag 1997.

[7] Detlev Buchholz. Persönliche Mitteilung.

[8] Detlev Buchholz: *The physical state space of quantum electrodynamics.* Comm. Math. Phys. **85** (1982), S. 49–71.

[9] Detlev Buchholz: *Gauss' law and the infraparticle problem.* Phys. Lett. **B 174 (3)** (1986), S. 331 – 334.

[10] Detlev Buchholz: *On the manifestations of particles* in: R.N. Sen und A. Gersten (Hrsg.): *Mathematical Physics Towards the 21st Century.* Beer-Sheva 1993: Ben Gurion University of the Negev Press 1994. S. 177 – 202.

[11] Detlev Buchholz: *Quarks, gluons, colour: facts or fiction?* Nuclear Physics **B 469** (1996), S. 333–353.

[12] Detlev Buchholz und Rainer Verch: *Scaling algebras and renormalization group in algebraic quantum field theory.* Rev. Math. Phys **7** (1995), S. 1195.

[13] Detlev Buchholz und Rainer Verch: *Scaling algebras and renormalization group in algebraic quantum field theory, II. instructive examples.* Rev. Math. Phys. **10** (1998), S. 775–800.

[14] Detlev Buchholz und Rainer Wanzenberg: *The realm of the vacuum.* Comm. Math. Phys. **143** (1991), S. 577 – 589.

[15] J. Fröhlich, Gianni Morchio und Franco Strocchi: *Charged sectors and scattering states in quantum electrodynamics.* Ann. Phys. **119** (1979), S. 241–248.

[16] John R. Giles: *Convex Analysis with Application in the Differentiation of Convex Functions.* Boston, London, Melbourne: Pitman 1982.

[17] Rudolf Haag: *Local Quantum Physics.* Zweite Auf"—lage. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1996.

[18] J.H. Lowenstein und J.A. Swieca: *Quantum electrodynamics in two dimensions.* Ann. Phys. **68** (1971), S. 172–195.

[19] Martin Porrmann. *The Concept of Particle Weights in Local Quantum Field Theory.* Doktorarbeit, Universität Göttingen, 1999. *In Vorbereitung.*

[20] Michael Reed und Barry Simon: *Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Band II von *Methods of Modern Mathematical Physics.* San Diego: Academic Press 1975.

[21] Michael Reed und Barry Simon: *Functional Analysis*, Band I von *Methods of Modern Mathematical Physics.* Korrigierte und erweiterte Auf"—lage. San Diego: Academic Press 1980.

[22] Friedrich Riesz und Béla Sz.-Nagy: *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Band 27 von *Hochschulbücher für Mathematik.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.

[23] G. Roepstorff: *Coherent photon states and spectral condition.* Comm. Math. Phys. **19** (1970), S. 301–314.

[24] B. Schroer: *Infrateilchen in der Quantenfeldtheorie.* Fortschr. Phys. **173** (1963), S. 1527.

[25] J. Schwinger: *Gauge invariance and mass, II.* Phys. Rev. **128** (1962), S. 2425.

[26] J. Schwinger: *Gauge Theory of Vector Particles* in: Theoretical Physics, Trieste Lectures 1962. Wien: I.A.E.A 1963. S. 89.

[27] E.P. Wigner: *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group.* Ann. Math. **40** (1939), S. 149.

Mir bleibt noch, allen zu danken, die zum Gelingen der Diplomarbeit und meines Studiums überhaupt beigetragen haben:

- meinen Eltern für die vorbehaltlose Unterstützung in allen Lebenslagen,
- Herrn Prof. Dr. D. Buchholz für das interessante Thema und die freundliche und lehrreiche Betreuung,
- Herrn Prof. Dr. H. Roos für die Übernahme des Koreferats,
- meinem Schreibtischnachbarn und Freund Hanno Sahlmann für unzählige Diskussionen und freundschaftliche Arbeitsatmosphäre,
- sowie ihm, Agnes Doerfelt, Folkert Kampert, Sören Köster und Walter Kunhardt für das Korrekturlesen und zahlreiche hilfreiche Anmerkungen zum Manuskript.